1. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(k)$ 이 참이다.
(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(k+1)$ 도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

- ① $0, k$ ② $0, k+1$ ③ $0, k-1$
④ $1, k$ ⑤ $1, k+1$

해설

명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(k)$ 이 참이다.
(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(k+1)$ 도 참이다.

2. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

$$\begin{aligned} & \cdot a_1 = 1, a_2 = 2 \\ & \cdot 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0 (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$$a_{n+1} - a_n = b_n \text{ 이라 하면 } b_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$$

$$b_1 = a_2 - a_1 \text{ 이므로 } b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_{50} = 3 - 2^{-48}$$

$$\therefore p = 3, q = -48 \text{ 이므로 } p + q = -45$$

3. $a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 120

해설

$a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이므로

$$a_3 = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$a_4 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$a_5 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$a_6 = \frac{2+1}{1} = 3$$

$$a_7 = \frac{3+1}{2} = 2$$

⋮

$$\therefore a_1 = a_6 = a_{11} = \dots = 3$$

$$a_2 = a_7 = a_{12} = \dots = 2$$

$$a_3 = a_8 = a_{13} = \dots = 1$$

$$a_4 = a_9 = a_{14} = \dots = 1$$

$$a_5 = a_{10} = a_{15} = \dots = 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{66} a_n = 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_1$$

$$= 13 \times 9 + 3 = 120$$

5. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_n + S_n = n$ 과 같이 정의될 때, 일반항 a_n 은?(단, $n = 1, 2, 3, \dots, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$)

- ① $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 ② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 ③ $3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 ④ $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 ⑤ $2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

해설

$$a_1 + S_1 = 1, S_1 = a_1 \text{ 이므로 } 2a_1 = 1$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} a_{n+1} + S_{n+1} = n+1 \\ -) a_n + S_n = n \\ \hline a_{n+1} - a_n + a_{n+1} = 1 \end{array}$$

$$\text{에서 } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1) (n = 1, 2, 3, \dots)$$

이때, 수열 $\{a_n - 1\}$ 은 첫째항이 $-\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$