1. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

> (i) $P(\boxed{(가)})$이 참이다.
> (ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{(나)})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k　　② 0, $k+1$　　③ 0, $k-1$

④ 1, k　　⑤ 1, $k+1$

해설

명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{1})$이 참이다.

(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{k+1})$도 참이다.

2. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

- $a_1 = 1,\ a_2 = 2$
- $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 $b_n = \dfrac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1$ 이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore\ p = 3,\ q = -48$ 이므로 $p + q = -45$

3. $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 120

해설

$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$a_3 = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$a_4 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$a_5 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$a_6 = \frac{2+1}{1} = 3$$

$$a_7 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$\vdots$

$\therefore\ a_1 = a_6 = a_{11} = \cdots = 3$

$a_2 = a_7 = a_{12} = \cdots = 2$

$a_3 = a_8 = a_{13} = \cdots = 1$

$a_4 = a_9 = a_{14} = \cdots = 1$

$a_5 = a_{10} = a_{15} = \cdots = 2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{66} a_n = 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_1$

$= 13 \times 9 + 3 = 120$

4. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \cdots$ ㉠ 이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{(가)}$

$=k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}$

따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① $2k-1,\ (k+1)^2$

② $2k,\ k+1$

③ $2k,\ (k+1)^2$

④ $2k+1,\ k+1$

⑤ $2k+1,\ (k+1)^2$

해설

(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$를 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}$

$=k^2+\boxed{2k+1}=\boxed{(k+1)^2}$

따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$\therefore$ (가)$=2k+1$, (나)$=(k+1)^2$

5. 수열 $\{a_n\}$이 $a_n + S_n = n$과 같이 정의될 때, 일반항 a_n은?(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$)

① $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ② $2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ③ $3-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

④ $1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ⑤ $2+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

해설

$a_1 + S_1 = 1,\ S_1 = a_1$ 이므로 $2a_1 = 1$

$\therefore\ a_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} + S_{n+1} = n+1 \\ -) & a_n + S_n \quad = n \\ \hline & a_{n+1} - a_n + a_{n+1} = 1 \end{array}$$

에서 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1)(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이때, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $-\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$a_n - 1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad\therefore\ a_n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

6. 다음은 $h>0$일 때, $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots$ ㉠ 이 성립함을 증명한 것이다.

> (i) $n=2$일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{\quad (가) \quad}$ 이므로 ㉠이 성립한다.
> ii) $n=k(k \ge 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
> $(1+h)^k = 1+kh$
> $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\quad (가) \quad})(1+h) > 1+(k+1)h$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 ㉠은 $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $1+2h,\ 1+kh$
② $1+2h,\ 1+(k+1)h$
③ $1+h^2,\ 1+kh$
④ $1+h^2,\ 1+(k+1)h$
⑤ $2h+h^2,\ 1+kh$

해설

(i) $n=2$일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{1+2h}$ 이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k(k \ge 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$(1+h)^k = 1+kh$
$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{1+kh})(1+h) > 1+(k+1)h$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 ㉠은 $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.