

1. $\left\{ \frac{n^2 - 1}{n(n+1)} \right\}$ 의 제 100항은?

① $\frac{1}{10}$

② $\frac{9}{10}$

③ $\frac{99}{100}$

④ $\frac{99}{101}$

⑤ $\frac{101}{100}$

해설

$$\left\{ \frac{n^2 - 1}{n(n+1)} \right\} = \frac{n-1}{n}$$

$$\therefore \text{제 100항은 } \frac{99}{100}$$

2. 등차수열 a_n 의 일반항이 $a_n = -2n - 2$ 일 때, 첫째 항 a 와 공차 d 는?

① $a = -1, d = 2$

② $a = -1, d = -2$

③ $a = -2, d = -2$

④ $a = -4, d = -2$

⑤ $a = -4, d = 2$

해설

$$a_n = -2n - 2 \text{ 이므로}$$

$$a_1 = -2 \cdot 1 - 2 = -4,$$

$$a_2 = -2 \cdot 2 - 2 = -6 \text{ 이므로}$$

$$d = a_2 - a_1 = -2$$

3. 세 수 4, x , -6 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

x 는 4와 -6 의 등차중항이므로
 $2x = 4 + (-6) = -2 \quad \therefore x = -1$

4. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{2n+1}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항과 공비 r 을 차례대로 구하면?

- ① $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{6}, 3$ ③ $\frac{9}{2}, 9$ ④ $\frac{1}{6}, 9$ ⑤ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

해설

$$a_1 = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2}, \quad \frac{1}{6} \cdot 3^5 = \frac{81}{2}$$

$$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{81}{2}}{\frac{9}{2}} = 9$$

$$\therefore a_1 = \frac{9}{2}, \quad r = 9$$

5. 첫째항이 1, 공비가 -3인 항수가 5인 등비수열의 합은?

- ① 61 ② 122 ③ 244 ④ 361 ⑤ 722

해설

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ 에서}$$
$$S_5 = \frac{1 \cdot \{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = 61$$

6. $a, -6, b, -12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

b 는 -6 과 -12 의 등차중항이므로

$$b = \frac{-6 + (-12)}{2} = -9$$

따라서 이 수열은 공차가 -3 인 등차수열이다.

$$a + (-3) = -6 \text{에서 } a = -3$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-9}{-3} = 3$$

7. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, $a_4 + a_7$ 의 값은?

① 12

② 18

③ 24

④ 30

⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 120 \quad \therefore 2a + 9d = 24$$

$$a_4 + a_7 = (a + 3d) + (a + 6d) = 2a + 9d = 24$$

8. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$ 일 때, S_{10} 의 값은?

① 64 ② 80 ③ 92 ④ 100 ⑤ 120

해설

$$S_5 = \frac{5(2a + 4d)}{2} = 25 \text{ 에서 } a + 2d = 5 \cdots \textcircled{1}$$

$$S_7 = \frac{7(2a + 6d)}{2} = 49 \text{ 에서 } a + 3d = 7 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$d = 2, a = 1$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

9. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항에서 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, a_{15} 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ 일 때, } a_n &= S_n - S_{n-1} \text{ 이므로} \\ a_n &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)\{n+2-(n-1)\}}{3} \\ &= \frac{n(n+1) \cdot 3}{3} \\ &= n(n+1) \\ \therefore a_{15} &= 15 \times 16 = 240 \end{aligned}$$

10. 제2항이 6, 제5항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은? (단, 공비는 실수)

① 3^9

② $2 \cdot 3^9$

③ 3^{10}

④ $2 \cdot 3^{10}$

⑤ 3^{11}

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = ar = 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_5 = ar^4 = 162 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 2, r = 3$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 3이므로 일반항 a_n

은

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$$

11. 등비증항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, □안에 알맞은 수를 모두 더하면?

-2, □, -8, □, □, 64,...

- ① -11 ② -12 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b 라 하면 $b^2 = (-2) \times (-8)$, $b^2 = 16$
따라서 $b = 4$ 이고 공비는 -2 인 수열이 되므로 구하는 수열은
 $-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$
 $\therefore 4 + 16 - 32 = -12$

12. 세 수 $x-4$, x , $x+8$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

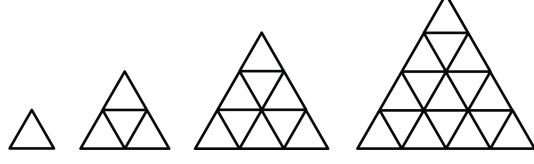
해설

x 가 $x-4$, x , $x+8$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = (x-4)(x+8), \quad x^2 = x^2 + 4x - 32$$

$$4x = 32 \therefore x = 8$$

13. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, ... 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6 배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



- ① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$ 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 9$$

⋮

$$\therefore a_n = n^2$$

$$\therefore a_6 = 36$$

14. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 제 50 항의 값은?

2, 7, 12, 17, 22...

- ① 227 ② 237 ③ 247 ④ 257 ⑤ 267

해설

주어진 수열은 첫째항이 2이고, 공차가 5인
등차수열이므로 $a_n = 5n - 3$
 $\therefore a_{50} = 5 \cdot 50 - 3 = 247$

15. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 + a_7 = 60$ 일 때, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ 의 값은?

① 140 ② 145 ③ 150 ④ 155 ⑤ 160

해설

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 a_2, a_6, a_{10} 과 a_5, a_6, a_7 은 모두 등차수열을 이룬다.

따라서 a_6 은 a_2 와 a_{10} , a_4 와 a_8 , a_5 와 a_7 의 등차중항이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$$

$$= (a_2 + a_{10}) + (a_4 + a_8) + a_6$$

$$= 2a_6 + 2a_6 + a_6 = 5a_6$$

$$= 5 \cdot \frac{a_5 + a_7}{2} = 5 \cdot \frac{60}{2} (\because a_5 + a_7 = 60)$$

$$= 150$$

16. 공차가 $d_1 (d_1 \neq 0)$ 인 등차수열
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ 에 대하여 두 수열
 $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, a_7 + a_8, \dots$
 $a_1 + a_2 + a_3, a_4 + a_5 + a_6, a_7 + a_8 + a_9, \dots$ 의 공차를 각각 d_2, d_3
라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① $2d_2 = 3d_3$ ② $3d_2 = 2d_3$ ③ $5d_2 = 2d_3$
④ $7d_2 = 3d_3$ ⑤ $9d_2 = 4d_3$

해설

첫째 수열은 $2a_1 + d_1, 2a_1 + 5d_1, 2a_1 + 9d_1, \dots$ 이므로 공차가 $d_2 = 4d_1$ 이고
둘째 수열은 $3a_1 + 3d_1, 3a_1 + 12d_1, 3a_1 + 21d_1, \dots$ 이므로
공차가 $d_3 = 9d_1$ 이다.
 $\therefore 9d_2 = 4d_3$

17. 두 수 $\frac{1}{7}$ 과 $\frac{1}{3}$ 의 사이에 세 개의 수 x, y, z 를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}, x, y, z, \frac{1}{3}$ 이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x+y+z)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{1}{7}, x, y, z, \frac{1}{3}$ 이 조화수열을 이루려면 $7, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, 3$ 이 등차수열을 이루어야 하므로

$$\frac{1}{x} = 6, \frac{1}{y} = 5, \frac{1}{z} = 4$$

$$\therefore x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{5}, z = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 60(x+y+z) = 60\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 60 \cdot \frac{37}{60} = 37$$

18. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$$\begin{aligned} S &= (3\text{의 배수의 총합}) + (5\text{의 배수의 총합}) - (15\text{의 배수의 총합}) \\ &= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195) \\ &= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} \\ &\quad - \frac{7(105 + 195)}{2} \\ &= 47 \cdot 150 \\ \therefore \frac{1}{150} S &= 47 \end{aligned}$$

19. 첫째항이 100이고, 공차가 -3 인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34번째 항

해설

$$\begin{aligned}a_n &= 100 + (n - 1) \cdot (-3) \\&= -3n + 103 > 0 \\n &< 34.333 \cdots \\\therefore n &= 34 \text{ 일 때 최대}\end{aligned}$$

20. 10행 10열로 이루어진 표에 다음 그림과 같이 1, 3, 4, 6이 쓰여 있다. 이 표의 나머지 칸에는 모든 행과 모든 열이 각각 등차수열을 이루도록 숫자가 쓰인다고 할 때, 이 표에 있는 모든 숫자의 합은?

	제1열	제2열	...	제10열
제1행	1	3		
제2행	4	6		
⋮				
제10행				

- ① 2200 ② 2250 ③ 2300 ④ 2350 ⑤ 2400

해설

제 n 행의 수열의 합을 S_n 이라 하면
제1행은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로
$$S_1 = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 100, 공차가 $3 \cdot 10 = 30$ 인 등차수열이므로
$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} = \frac{10(2 \cdot 100 + 9 \cdot 30)}{2} = 2350$$

21. 서로 다른 세 수 a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이루고 있다. b 와 c 사이에 두 수를 넣어 5개의 수가 등차수열을 이루도록 하였다. 이때, $\frac{b+c}{a}$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

b 와 c 사이에 두 수를 넣어 만들어진 등차수열의 공차를 d 라 하면

$$b = a + d, c = a + 4d \cdots \text{㉠}$$

세 수 a, b, c 가 등비수열을 이루므로

$$(a + d)^2 = a(a + 4d)$$

$$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 4ad$$

$$\therefore d = 2a$$

$$\text{㉠에서 } b = 3a, c = 9a$$

$$\therefore \frac{b+c}{a} = \frac{3a+9a}{a} = 12$$

22. $a_1 = 1$ 이고, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 m 이 짝수일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{m-1} = 85$, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_m = 170$ 이다. 이때, $r + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$m = 2k$ (k 는 자연수) 라고 하자.
 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이므로
 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$
 $= \frac{a_1(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = \frac{r^{2k} - 1}{r^2 - 1} = 85 \cdots \textcircled{㉠}$
 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k}$
 $= \frac{a_2(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = 170 \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}$ 을 하면 $r = 2$
이것을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면
 $\frac{2^{2k} - 1}{3} = 85, 2^{2k} = 256 = 2^8$
따라서 $2k = m = 8$
 $r + m = 10$

23. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100보다 크게 되는가?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} > 100 \text{인}$$

자연수 n 의 최솟값을 구하면 된다.

$$2^n - 1 > \frac{100}{3}$$

$$2^n > \frac{103}{3} \approx 34. \times \times \times$$

$$2^5 = 32, \quad 2^6 = 64 \text{이므로}$$

$$n = 6$$