

1. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right)$ 의 최솟값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{2y}\right)\left(8y + \frac{1}{x}\right) &= 8xy + \frac{1}{2xy} + 5 \\ &\geq 2\sqrt{8xy \times \frac{1}{2xy}} + 5 \\ &= 4 + 5 = 9\end{aligned}$$

2. 양수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 9$ 일 때 abc 의 최댓값은?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

⑤ 27

해설

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc} \text{에서 } 9 \geq 3 \sqrt[3]{abc}, \\ 3 \geq \sqrt[3]{abc}, \quad 27 \geq abc$$

3. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값 M , 최솟값 m 의 합 $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해
 $(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$
 $(x + 2y)^2 \leq 5 \cdot 5$
 $\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5$ 이므로
 $x + 2y$ 의 최댓값 $M = 5$, 최솟값 $m = -5$
 $\therefore M + m = 5 + (-5) = 0$

4. 두 양수 a, b 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

- ① a, b 의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.
- ② $\sqrt{ab}$ 는 a, b 의 기하평균이다.
- ③ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.
- ④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.
- ⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots$ 절대부등식

$\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

5. $a > 0$ 일 때, $2a + \frac{1}{2a}$ 의 최솟값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$a > 0$ 이므로 $2a > 0$ 산술기하평균의 관계로부터

$$2a + \frac{1}{2a} \geq 2 \cdot \sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

6. 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 에 대하여 xy 의 최솟값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}, \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$$

$$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$$

따라서 $xy \geq 16$ 이므로 xy 의 최솟값은 16

7. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로

구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0, \frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x 는 1이다.

최솟값은 3이고, x 값은 1이다.

8. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때,
 $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2} + 2$ 이므로 $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $-2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$

9. a, b, x, y 가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때 $ax + by$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
 $8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
 $\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$ (최솟값) = -16

10. 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 일 때 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은?

① $M = 3, m = 0$

② $M = 3, m = -3$

③ $M = 6, m = 0$

④ $M = 6, m = -6$

⑤ $M = 6, m = -12$

해설

x, y, z 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$
 $\geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$
 $36 \geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$
 $-6 \leq x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \leq 6$
 $\therefore M = 6, m = -6$

11. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. ()

안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\quad)^2}{2} \geq 0$$

- ① $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

③ $a + b$
- ④ $a - b$

⑤ ab

해설

$$\begin{aligned} \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} &= \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

12. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\frac{25}{4}$

② $5 + 5\sqrt{2}$

③ 25

④ $\frac{25}{4} + \sqrt{2}$

⑤ $\frac{45}{4} + 5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b 라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \text{ 이고}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ 에서 } 25 \geq 2ab$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab \leq \frac{25}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이고

$$a = b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때}$$

$$\text{둘레의 길이는 } 5 + 5\sqrt{2}$$

13. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

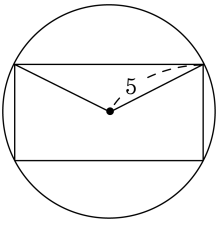
▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

14. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$
④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$



해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
가로의 길이를 a , 세로의 길이를 b 라 하면
 $a^2 + b^2 = 100$
코시-슈바르츠의 부등식에 의해
 $(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$
 $\therefore 200 \geq (a + b)^2 \therefore a + b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로
직사각형 둘레의 길이의 최댓값은
 $2(a + b) = 20\sqrt{2}$

15. $x > 1$ 일 때, $2x + \frac{2}{x-1}$ 는 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} 2x + \frac{2}{x-1} &= 2 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) \\ x + \frac{1}{x-1} &= (x-1) + \frac{1}{x-1} + 1 \\ &\geq 2 \sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 1 \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore 2 \left(x + \frac{1}{x-1} \right) \geq 3 \cdot 2 = 6$$

최솟값은 $x-1 = \frac{1}{x-1}$ 일 때 6이다

$\therefore$ 즉, $x = 2$ 일 때 최솟값은 6이다.

$$\therefore a + b = 2 + 6 = 8$$