1. $x>0,\ y>0$일 때, $\left(x+\frac{1}{2y}\right)\left(8y+\frac{1}{x}\right)$의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\left(x+\frac{1}{2y}\right)\left(8y+\frac{1}{x}\right)=8xy+\frac{1}{2xy}+5$$
$$\geq 2\sqrt{8xy\times\frac{1}{2xy}}+5$$
$$=4+5=9$$

2. 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19　② 21　③ 23　④ 25　⑤ 27

해설

$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \ge 3\sqrt[3]{abc}$,

$3 \ge \sqrt[3]{abc}$, $\quad 27 \ge abc$

3. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M+m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$(x+2y)^2 \leq 5 \cdot 5$

$\therefore -5 \leq x+2y \leq 5$이므로

$x+2y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$

$\therefore \ M+n=5+(-5)=0$

4. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \dfrac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\dfrac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

5. $a > 0$ 일 때, $2a + \dfrac{1}{2a}$ 의 최솟값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a > 0$ 이므로 $2a > 0$ 산술기하평균의 관계로부터

$$2a + \frac{1}{2a} \geq 2 \cdot \sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

6. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$을 만족하는 양의 정수 x, y에 대하여 xy의 최솟값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{1}{xy}}$

$\therefore \frac{1}{16} \geq \frac{1}{xy}$

따라서 $xy \geq 16$이므로 xy의 최솟값은 16

7. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0,\ \frac{1}{x^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2+1+\frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}}+1 \geq 2+1=3$$

등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

8. 양수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x}=x+2+\frac{2}{x}$$

$$x+\frac{2}{x}+2\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$$

(단, 등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b=2\sqrt{2}+2$

등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

9. a, b, x y가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$일 때 $ax + by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

10. 실수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

① $M=3,\ m=0$
② $M=3, m=-3$
③ $M=6, m=0$
④ $M=6, m=-6$
⑤ $M=6, m=-12$

해설

x, y, z가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\left\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$36 \geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$-6 \leq x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z \leq 6$
$\therefore M=6,\ m=-6$

11. 다음은 $a > 0,\ b > 0$일 때 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$임을 증명한 것이다. (　　　) 안에 알맞은 것은?

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\qquad)^2}{2} \geq 0$$

① $\sqrt{a} + \sqrt{b}$　② $\sqrt{a} - \sqrt{b}$　③ $a+b$

④ $a-b$　⑤ ab

해설

$$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

12. 빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대가 되는 삼각형의 넓이와 그 때 삼각형의 둘레의 길이를 더하면?

① $\dfrac{25}{4}$　　② $5+5\sqrt{2}$　　③ 25

④ $\dfrac{25}{4}+\sqrt{2}$　　⑤ $\dfrac{45}{4}+5\sqrt{2}$

해설

밑변과 높이를 각각 a, b라 하면

$a^2+b^2=25$이고

$a^2+b^2 \geq 2ab$에서 $25 \geq 2ab$

$\therefore \dfrac{1}{2}ab \leq \dfrac{25}{4}$이므로

삼각형의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{25}{4}$이고

$a=b=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$일 때

둘레의 길이는 $5+5\sqrt{2}$

13. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

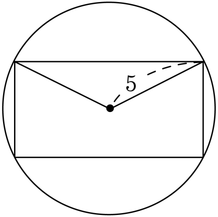
$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore \quad -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore \quad M=10,\ m=-10$

$\therefore \quad M-m=10-(-10)=20$

14. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$

④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$

해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,

가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b 라 하면

$a^2 + b^2 = 100$

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

$\therefore 200 \geq (a + b)^2$ $\therefore a + b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로

직사각형 둘레의 길이의 최댓값은

$2(a + b) = 20\sqrt{2}$

15. $x > 1$일 때, $2x + \dfrac{2}{x-1}$는 $x = a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. 이 때, $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$2x + \frac{2}{x-1} = 2\left(x + \frac{1}{x-1}\right)$$

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x-1} &= (x-1) + \frac{1}{x-1} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}} + 1 \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore\ 2\left(x + \frac{1}{x-1}\right) \geq 3 \cdot 2 = 6$$

최솟값은 $x - 1 = \dfrac{1}{x-1}$ 일 때 6이다

$\therefore$ 즉, $x = 2$ 일 때 최솟값은 6이다.

$\therefore a + b = 2 + 6 = 8$