

1. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 X 로의 항등함수를 모두 고른 것은 무엇인가?

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & g(x) &= |x| \\ h(x) &= x^3, & k(x) &= \frac{|x+1| - |x-1|}{2} \end{aligned}$$

- ① f

② f, h

③ f, g, h

④ f, h, k

⑤ g, h, k

해설

$f : f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
 $g : g(-1) = 1$ 이므로 항등함수가 아니다.
 $h : h(-1) = -1, h(0) = 0, h(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
 $k : k(-1) = -1, k(0) = 0, k(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
따라서 항등함수인 것은 f, h, k 이다.

2. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는?

① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4개씩이므로
 $4 \times 4 \times 4 = 64$ (개)

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
 $\therefore 4^3 = 64$
 $\therefore a + b = 64$

4. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수는 $f(x) = 1, f(x) = 2, f(x) = 3$ 의 3개가 있다.

5. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3, f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

6. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 64개

해설

$a \rightarrow$, $b \rightarrow$, $c \rightarrow$

Y 의 원소 p, q, r, s 에서 세 개를 뽑아 위 안에 넣어 놓는 방법의 수를 구하는 것이다.

이 때 세 개의 수는 모두 같거나,

두 개만 같거나 모두 달라도 좋다.

따라서 a 에는 p, q, r, s 의 4가지,

b 에는 a 에 온 수가 와도 좋으므로 역시 4가지,

마찬가지로 c 에는 a, b 에 온 수가

와도 좋으므로 4가지씩이 있다.

$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64(\text{개})$

7. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)

8. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24개

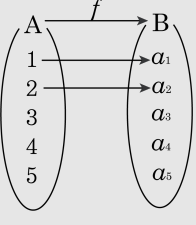
해설

a 에 대응하는 수가 b 에 대응해서는 안 되고
 a, b 에 대응하는 수가 c 에 대응해서는 안 되므로
 $\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$ (개)

9. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?
- ① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개
- ④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수
 $f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소
3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중
하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 =$
125 (개)



10. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 27

② 30

③ 33

④ 36

⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$$a = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$$b = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$$

11. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 일대일 대응 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

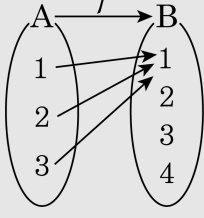
$f: A \rightarrow B$ 가 일대일대응이라면 3 은 a_3, a_4, a_5 중 하나의 원소와 대응하고, 4 는 나머지 두 가지 원소중의 하나와 대응하여야 한다. 또 5 는 3, 4 가 대응하고 남은 원소와 대응하게 되므로 함수 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$

12. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 와 $B = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 A 에서 B 로의 함수의 개수를 a , 일대일 함수의 개수를 b , 상수함수의 개수를 c 라 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 64
- ② 32
- ③ 128
- ④ 92
- ⑤ 48

해설

- (1) 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 가능하게 3 번 선택하여 늘어놓는 경우와 같으므로
∴ $a = 4 \times 4 \times 4 = 64$
- (2) 일대일 함수의 개수 : 1, 2, 3, 4 를 중복 없이 3 번 선택하여 늘어놓는 경우이므로
∴ $b = 4 \times 3 \times 2 = 24$
- (3) 상수함수의 개수 : 그림과 같이 1, 2, 3, 4 중 한 원소에만 대응되는 경우이므로
∴ $c = 4$



∴ $a + b + c = 92$

14. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f : A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이라면
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

15. 집합 $X = \{-2, 0, 2\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 가 있다. X 에서 Y 로 함수 $f : X \rightarrow Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 개수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 4 가지

④ 5 가지

⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3$, $f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1$, $f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3$, $f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

16. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 가 있다. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 3개 ② 5개 ③ 7개 ④ 9개 ⑤ 11개

해설

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x) = k$
(단, k 는 상수)를 만족시킨다고 하면
 $x = -1$ 일 때, $-f(-1) = k$
 $x = 0$ 일 때, $0 \cdot f(0) = k$
 $\therefore k = 0$
 $x = 1$ 일 때, $f(1) = k$ 에서
 $f(-1) = f(1) = 0$ 임을 알 수 있다.
따라서, 집합 X 에서 Y 로의 함수 중
임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가
상수가 되려면 -1 이 대응할 수 있는
원소 0 의 1 가지 0 이 대응할 수 있는 원소는
 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5 가지
 1 이 대응할 수 있는 원소는 0 의 1 가지
 $\therefore 1 \times 5 \times 1 = 5$ (개)

17. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가
 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면
-1 이 대응할 수 있는 원소는
-2, -1, 0, 1, 2 의 5 가지.
0 이 대응할 수 있는 원소는
 $f(-0) = -f(0)$ 에서, $2f(0) = 0$,
즉 0 의 1 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지
따라서, 함수 f 의 개수는 $5 \times 1 \times 1 = 5$ (개)

18. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

- ① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지
0 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는
-1 이 대응한 원소 1 가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

19. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

집합 $A = \{a, b, c\}$ 일 때, A 에서 A 로의 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여,
함수의 개수는 m 개,
일대일 대응 함수의 개수는 n 개,
상수 함수는 s 개,
항등함수는 r 개이다.
 $m + n + s + r$ 의 값을 구하여라.

- ① 21 ② 27 ③ 33 ④ 37 ⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$ (가지) $\therefore m = 27$
일대일 대응의 개수는
 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) $\therefore n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지
 $\therefore s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore r = 1$
따라서 $m + n + s + r = 27 + 6 + 3 + 1 = 37$

20. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) \leq x$ 를 만족한다. 이 때, 함수 f 의 개수는?

- ① 16 개 ② 20 개 ③ 24 개 ④ 28 개 ⑤ 32 개

해설

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1 의 1 개 $\Leftarrow f(1) \leq 1$
 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2 의 2 개 $\Leftarrow f(2) \leq 2$
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3 의 3개 $\Leftarrow f(3) \leq 3$
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 4 의 4개 $\Leftarrow f(4) \leq 4$
따라서, 구하는 함수 f 의 개수는
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ (개)

21. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

- I. $f(0) \leq f(1)$
II. $f(2) \geq f(3)$
III. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- < 보기 >
- $\textcircled{\tiny \neg}$ $f(2) = 1$

$\textcircled{\tiny \cup}$ $f(3) = 3f(1)$
- $\textcircled{\tiny \cap}$ $f(-1) > f(1)$

- $\textcircled{1} \textcircled{\tiny \neg}$

$\textcircled{2} \textcircled{\tiny \cup}$

$\textcircled{3} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}$
- $\textcircled{4} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cap}$

$\textcircled{5} \textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \cup}, \textcircled{\tiny \cap}$

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 I, II를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 III에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 $\textcircled{\tiny \neg}$ 뿐이다.

23. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = f(x^2)$ 으로 되는 A 에서 B 로의 함수 f 의 개수는?

① 12 개 ② 20 개 ③ 25 개 ④ 27 개 ⑤ 30 개

해설

$f(-1) = f(1), f(0) = f(0)$ 이므로
 A 의 원소 1 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
 A 의 원소 0 이 대응하는 방법의 수는 5 가지
 $\therefore 5 \times 5 = 25$ (가지)

24. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여
Ⅰ. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
Ⅱ. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

- ① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 12개

해설

조건 Ⅰ에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면
 $f(0) = f(0) + f(0)$ 에서 $f(0) = 0$
 $x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면
 $f(0) = f(1) + f(-1)$ 에서, $f(-1) = -f(1)$
이때, 조건 Ⅱ에 의해
 $f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는
원소는 0의 1가지,
1이 대응할 수 있는 원소는
-2, -1, 1, 2의 4가지,
-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,
따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

25. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 다음 두 조건을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하여라.

(i) $f : X \rightarrow Y$ 는 일대일 함수
(ii) $x \neq y$ 인 X 의 원소 x, y 에 대해
 $f(xy) = f(x)f(y)$

▶ 답: 개

▷ 정답 : 4개

해설

조건 (ii)에서 나타날 수 있는 경우는
 $f(0 \cdot 1) = f(0) = f(0) \cdot f(1) \dots \textcircled{1}$
 $f(0 \cdot 2) = f(0) = f(0) \cdot f(2) \dots \textcircled{2}$
 $f(1 \cdot 2) = f(2) = f(1) \cdot f(2) \dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $f(0) \{f(1) - f(2)\} = 0$ 이고
조건 (i)로 부터 $f(0) = 0$ 이고
 $\textcircled{3}$ 에서 $f(2) \{f(1) - 1\} = 0$
 $f(2) \neq 0$ 이므로 $f(1) = 1, f(2) = 2, 3, \dots$
함수의 개수는 4 개