

1. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$$

2. 모든 항이 양수이고, 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $a_{m+n} = 2a_m a_n$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. $a_4 = 72$ 일 때, a_5 의 값은?

① $72\sqrt{3}$

② $72\sqrt{6}$

③ 144

④ $144\sqrt{3}$

⑤ 216

해설

$$a_{m+n} = 2a_m a_n \text{에 } m = 2, n = 2 \text{를 대입하면 } a_4 = 2a_2 a_2 = 72, a_2^2 = 36$$

$$\therefore a_2 = 6 (\because a_n > 0)$$

$$\text{또, } a_{m+n} = 2a_m a_n \text{에 } m = 1, n = 1 \text{을 대입하면}$$

$$a_2 = a_{1+1} = 2a_1 a_1 = 6, a_1^2 = 3$$

$$\therefore a_1 = \sqrt{3}$$

$$\text{또, } a_{m+n} = 2a_m a_n \text{에 } m = 4, n = 4 \text{를 대입하면}$$

$$a_5 = a_{4+1} = 2a_4 a_1 = 2 \cdot 72 \cdot \sqrt{3} = 144\sqrt{3}$$

3. $a_1 = 4, a_2 = 6, a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ ($n \geq 1$) 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_n$ 의 값은?

① $2^{10} + 6$

② $2^{10} + 0$

③ $2^{10} + 18$

④ $2^{11} + 9$

⑤ $2^{11} + 18$

해설

$a_{n+2} - a_{n+1} = P(a_{n+1} - a_n)$ 꼴로 변형하면

$$a_{n+2} - (1+P)a_{n+1} + Pa_n = 0 \quad \therefore P = 2$$

$$\text{즉, } a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$ 이고 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\therefore a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 4 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} (2^n + 2) = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 2 \cdot 10 \\ &= 2^{11} - 2 + 20 = 2^{11} + 18 \end{aligned}$$

4. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n - 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5

② -10

③ -15

④ -20

⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -3인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 5$$

$$\therefore a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$$

5. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$ 의 값은?

$$a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{6}, a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} (n = 1, 2, 3)$$

① $\frac{2}{9}$

② $\frac{5}{12}$

③ $\frac{7}{16}$

④ $\frac{5}{24}$

⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$ 은 조화수열이다. 따라서

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1} = 3$, $\frac{1}{a_2} = 6$ 이므로

$$\frac{1}{a_n} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n, a_n = \frac{1}{3n}$$

$$a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{12} \quad \therefore a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$$