1. 두 수 $2p+1$과 $2p+5$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$2p+1$, p^2, $2p+5$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \frac{(2p+1)+(2p+5)}{2}$

$2p^2 = 4p+6$, $p^2-2p-3=0$

$(p+1)(p-3)=0$

따라서 $p=-1$ 또는 $p=3$

이때, p는 양수이므로 $p=3$

2. 4와 102 사이에 5개의 수를 넣어 등차수열을 만들려고 한다. 이때, 4와 102 사이에 넣을 5개의 수의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 265

해설

항의 개수가 7개 이므로 7개 항의 합을 S_7, 구하는 수의 합을 S라 하면

$S = S_7 - (4 + 102) = \frac{7(4 + 102)}{2} - 106 = 265$

3. 첫째항이 100이고, 공차가 −3인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 34번째 항

해설

$a_n = 100 + (n-1)\cdot(-3)$
$= -3n + 103 > 0$
$n < 34.333\cdots$
$\therefore n = 34$일 때 최대

4. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\log_2(S_n + k) = n - 1$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이 되도록 하는 상수 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$\log_2(S_n + k) = n - 1$에서 $S_n + k = 2^{n-1}$
$\therefore\ S_n = 2^{n-1} - k$
$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1 - k$
$n \geq 2$일 때,
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= (2^{n-1} - k) - (2^{n-2} - k)$
$= 2^{n-1} - 2^{n-2}$
$= (2 - 1)2^{n-2} = 2^{n-2}$
이 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되려면 $S_1 = a_1$을 만족해야 하므로 $1 - k = 2^{-1}$ $\therefore\ k = \frac{1}{2}$

5. $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)=62$를 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$
$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\{\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)-(n^2-1)\}$
$=\sum_{k=1}^{n}\{(k^2+1)-(k^2-1)\}+(n^2-1)$
$=\sum_{k=1}^{n}2+(n^2-1)=n^2+2n-1=62$
이것을 정리하여 인수분해하면 $(n+9)(n-7)=0$
따라서 $n=-9$ 또는 $n=7$
그런데 $n>0$이므로 $n=7$

6. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$을 n에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$　② $n^2 + 3n$　③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$　⑤ $3n^2 - 1$

해설

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\}$

$= 2n \cdots\cdots$ ㉠

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2$

이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 2n$

$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k - 2$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} (4k-2)$

$= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n$

$= 2n^2$

7. 수열 1, 2, 5, 10, 17, 26, $\cdots$ 의 제 20 항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 362

해설

1, 2, 5, 10, 17, 26

$\quad\vee\quad\vee\quad\vee\quad\vee\quad\vee$

$\quad 1\quad 3\quad 5\quad 7\quad 9$

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$= 1 + 2\cdot\dfrac{(n-1)n}{2} - (n-1)$

$= 1 + n^2 - n - n + 1$

$a_n = n^2 - 2n + 2$

$\therefore a_{20} = 400 - 40 + 2 = 362$

8. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제 10항은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$a_{n+1} - a_n = 2$의 양변에
$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots, (n-1)$을 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2 \\ a_3 - a_2 &= 2 \\ a_4 - a_3 &= 2 \\ &\vdots \\ +) a_n - a_{n-1} &= 2 \\ \hline a_n - a_1 &= 2(n-1) \end{aligned}$$

$\therefore a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n + 1$
$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10 + 1 = 21$

해설

첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이므로 $a_n = 2n + 1$
$\therefore a_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$

9. 수열 $\{a_n\}$을 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2n(n \geq 1)$으로 정의할 때, a_{100}의 값은?

① 9900 ② 9902 ③ 9904
④ 10100 ⑤ 10102

해설

$a_1 = 2$

$a_{n+1} = a_n + 2n$의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 99$를 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 \cdot 1 \\ a_3 &= a_2 + 2 \cdot 2 \\ &\vdots \\ +)\underline{a_{100} &= a_{99} + 2 \cdot 99} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{100} &= 2 + 2(1 + 2 + \cdots + 99) \\ &= 2 + 99 \cdot 100 \\ &= 9902 \end{aligned}$$

10. 세 수 $A=2^{\frac{1}{2}}, B=3^{\frac{1}{3}}, C=9^{\frac{1}{9}}$의 대소 관계는?

① $A<B<C$　② $B<A<C$　③ $B<C<A$

④ $C<B<A$　⑤ $C<A<B$

해설

$A=2^{\frac{1}{2}}$이면 $A^{18}=(2^{\frac{1}{2}})^{18}=2^9=512$

$B=3^{\frac{1}{3}}$이면 $B^{18}=(3^{\frac{1}{3}})^{18}=3^6=729$

$C=9^{\frac{1}{9}}$이면 $C^{18}=(9^{\frac{1}{9}})^{18}=9^2=81$

$C^{18}<A^{18}<B^{18}$이므로

$\therefore\ C<A<B$

11. 실수 a, b가 $(201.4)^a = (0.02014)^b = 10000$을 만족할 때, $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$\log_{201.4} 10^4 = a$

$4\log_{201.4} 10 = a$

$\log_{0.02014} 10000 = b$

$4\log_{0.02014} 10 = b$

$\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{4}\log_{10} 201.4 - \dfrac{1}{4}\log_{10} 0.02014$

$= \dfrac{1}{4}(\log 2.014 + 2 - \log 2.014 + 2)$

$= \dfrac{1}{4} \cdot 4 = 1$

12. $\log_{10} N$의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$의 두 근일 때, 상수 k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$\log_{10} N$의 정수 부분과 소수 부분을 m, α $(0 \le \alpha < 1)$라 하면 m, α가 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계로부터 $m + \alpha = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$이다.

따라서, $m = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$

한편, 두 근의 곱 $m\alpha = \frac{k}{2} = 1$이므로 $k = 2$

13. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 제 n항까지의 합을 각각 A_n, B_n이라 한다. $A_n : B_n = (3n+6) : (7n+2)$일 때, $a_7 : b_7$을 구하면? (단, n은 자연수)

① 5 : 17　② 15 : 31　③ 17 : 9
④ 31 : 15　⑤ 49 : 50

해설

a_n의 일반항을 $a+(n-1)d_1$
b_n의 일반항을 $b+(n-1)d_2$로 놓으면

$$A_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d_1\},$$

$$B_n = \frac{n}{2}\{2b+(n-1)d_2\}$$

$$\frac{2a+d_1n-d_1}{2b+d_2n-d_2} = \frac{3n+6}{7n+2} = \frac{3kn+6k}{7kn+2k}$$

$d_1 = 3k$, $2a-d_1 = 6k$(k는 비례상수)

따라서 $2a = 9k$, $a = \frac{9}{2}k$

$\therefore\ a_n = \frac{9}{2}k + (n-1)3k$

$d_2 = 7k$, $2b-d_2 = 2k$, $b = \frac{9}{2}k$

$\therefore\ b_n = \frac{9}{2}k + (n-1)7k$

$\therefore\ a_7 : b_7 = \left(\frac{9}{2}k+18k\right) : \left(\frac{9}{2}k+42k\right)$

$= \frac{45}{2}k : \frac{93}{2}k = 15 : 31$

14. 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n을 $S_n = 2^{n+1} - 3 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}$의 값은?

① $\frac{2^{20}}{5}$ ② $\frac{2^{21}+5}{4}$ ③ $\frac{2^{21}-5}{3}$

④ 2^{20} ⑤ $2^{21} - 5$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2^{n+1} - 3) - (2^n - 3) = 2^n (n \geq 2)$

$S_1 = 2^2 - 3 = 1$이므로

$\therefore\ a_n = 2^n (n \geq 2),\ a_1 = 1$

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} = 1 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{19}$

$= 1 + \frac{2^3 \{(2^2)^9 - 1\}}{4 - 1}$

$= 1 + \frac{2^{21}}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{2^{21}}{3}$

15. 오른쪽 그림과 같이 가운데 1을 중심으로 사각형의 안쪽에서 바깥쪽으로, 맨 아래 왼쪽부터 시계반대 방향으로 숫자를 써 나가는 판이 있다. 이 같은 규칙으로 숫자를 배열할 때, 81을 둘러싸고 있는 8개의 칸에 적힌 수들의 합은?

⋱	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋰
⋯	22	21	20	19	18	⋯
⋯	23	8	7	6	17	⋯
⋯	24	9	1	5	16	⋯
⋯	25	2	3	4	15	⋯
⋯	10	11	12	13	14	⋯
⋰	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋱

① 587 ② 601 ③ 616 ④ 632 ⑤ 648

해설

1을 중심으로 같은 둘레에 있는 수들을 하나의 군으로 보면 각 군의 끝항은
$(2n-1)^2 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이 된다.
따라서 81을 둘러싸고 있는
칸을 모두 채우고 그 수들의 합을 구하면

118	79	48	25
119	80	49	10
120	81	26	27
121	50	51	52

$119 + 51 + 121 + 49 + 80 + 50 + 120 + 26 = 616$

16. 다음 중 값이 다른 것은?

① $(\sqrt{2})^{\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}$ ② $\left(\sqrt{\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt{2}}$

③ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}}$ ④ $\left(\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$

⑤ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}}$

해설

$\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} = \left(\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}} = \left(\sqrt{\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt{2}}$

① $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2}^{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{8}}$

② $\left(\sqrt{\sqrt{2^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = (2^{\frac{\sqrt{2}}{4}})^{\sqrt{2}}$

$= 2^{\frac{1}{2}}$

③ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{2}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

④ $\left(\sqrt{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}^{\frac{2}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

⑤ $\sqrt{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

17. $2^{2x}+2^{-2x}=5$일 때, $2^{3x}+2^{-3x}$의 값은?

① 10　② $4\sqrt{7}$　③ 12　④ 15　⑤ $6\sqrt{7}$

해설

$(2^{2x}+2^{-2x})^3$

$=2^{6x}+2^{-6x}+3\cdot 2^{2x}\cdot 2^{-2x}(2^{2x}+2^{-2x})$

$=2^{6x}+2^{-6x}+3\times 5$

$2^{6x}+2^{-6x}=5^3-15=110$

$\because (2^{3x}+2^{-3x})^2$

$=2^{6x}+2^{-6x}+2$

$=112$

$2^{3x}+2^{-3x}>0$이므로 $2^{3x}+2^{-3x}=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$

18. 다음은 지수법칙 $a^r a^s = a^{r+s}$ 으로부터 모든 양수 x, y에 대하여 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$가 성립함을 증명한 것이다. (단, $a > 0, a \neq 1$)

$r = \log_a x,\ s = \log_a y$로 놓으면
$a^r = x,\ a^s =$ ㉠
지수법칙으로부터 $a^{r+s} =$ ㉡
로그의 정의에 의하여 $r + s = \log_a$ ㉢
따라서, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$이다.

① $x,\ x+y$ ② $y,\ x+y$ ③ $x,\ xy$
④ $y,\ xy$ ⑤ $x,\ \frac{y}{x}$

해설

$s = \log_a y$이므로 $y = a^s$ ∴ ㉠ y
$a^{r+s} = a^r a^s = xy$ ㉡ xy

19. $5^{100}, 11^{100}$ 은 각각 70 자리, 105 자리의 수이다. 이때 55^{10} 의 자릿수는?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

5^{100} 이 70 자리의 수이므로 $\log 5^{100}$ 의 지표는 69 이다.

$69 \le \log 5^{100} < 70,\ 69 \le 100\log 5 < 70$

$0.69 \le \log 5 < 0.7 \cdots$ ㉠

11^{100} 이 105 자리의 수이므로 $\log 11^{100}$ 의 지표는 104 이다.

$104 \le \log 11^{100} < 105,\ 104 \le 100\log 11 < 105$

$1.04 \le \log 11 < 1.05 \cdots$ ㉡

$\log 55^{10} = 10\log 55 = 10(\log 5 + \log 11)$

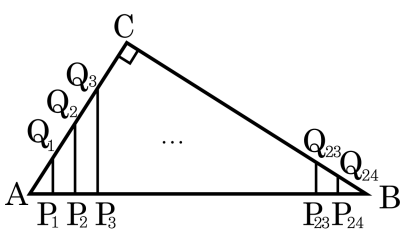
㉠ + ㉡을 하면

$1.73 \le \log 5 + \log 11 < 1.75$

$17.3 \le 10\log 55 < 17.5$

따라서 $\log 55^{10}$ 의 지표가 17 이므로 55^{10} 은 18 자리의 수이다.

20. 아래 그림과 같이 $\overline{AC}=15$, $\overline{BC}=20$이고, $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB를 25등분하는 점 P_1, P_2, $\cdots$, P_{24}를 지나 변 AB에 수직인 직선을 그어 변 AC 또는 변 CB와 만나는 점을 각각 Q_1, Q_2, $\cdots$, Q_{24}라 하자.
$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}$의 값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 150

해설

꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB}=\sqrt{15^2+20^2}=25$이므로 $\overline{CH}=\dfrac{15\times 20}{25}=12$

$\overline{AH}=\sqrt{15^2-12^2}=9$이고 P_9, Q_9가 각각 H, C와 일치하므로

$\overline{P_9Q_9}=\overline{CH}=12$

삼각형 AHC에서

$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_9Q_9}$

$=(1+2+3+\cdots+9)\tan A$

$=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{9\times 10}{2}=60$

또, 삼각형 BHC에서

$\overline{P_{10}Q_{10}}+\overline{P_{11}Q_{11}}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}$

$=(15+14+13+\cdots+2+1)\tan B$

$=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{15\times 16}{2}=90$

따라서 $\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}$

$=60+90=150$

21. 수직선 위의 점 $P_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 있다. 임의의 자연수 n에 대하여 두 점 P_n, P_{n+1}을 $2 : 1$로 내분하는 점이 P_{n+2}일 때, 점 P_{10}의 좌표는?(단, 두 점 P_1, P_2의 좌표는 각각 0, 3이다.)

① $\frac{9}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^7}$ ② $\frac{9}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^7}$ ③ $-\frac{9}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^7}$
④ $\frac{9}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^8}$ ⑤ $\frac{9}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^8}$

해설

점 $P_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 좌표를 a_n이라 하면

$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1} + a_n}{2 + 1}$, 즉 $3a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0$

따라서 $a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_{n+2} - a_n)$이므로

$$a_n = 0 + \frac{3\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{10} = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{9} = \frac{9}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^7}$$

22. m, n이 정수일 때, $\dfrac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은?

① 288 ② 2534 ③ 3042 ④ 5164 ⑤ 7254

해설

$\left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$이고 $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{\frac{1}{m}} = 3^{-\frac{4}{m}}$

이 수가 자연수가 되려면 $-\dfrac{6}{n}$과 $-\dfrac{4}{m}$가 모두 자연수가 되어야 하므로

$n = -1, -2, -3, -6$이고 $m = -1, -2, -4$이다.

따라서 $\dfrac{1}{64^{\frac{1}{n}}81^{\frac{1}{m}}}$이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합은

$(2^6 + 2^3 + 2^2 + 2)(3^4 + 3^2 + 3) = 78 \times 93 = 7254$

23. 양수 a에 대하여 $\log a$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(a)$, $g(a)$라 할 때, 보기 중 옳은 것은?

보기

㉠ $f(200)-g(200)=2-\log 2$

㉡ $g(a^2)<\frac{1}{2}$ 이면 $g(a^3)<\frac{1}{3}$ 이다.

㉢ $f(a^{50})=5f(a)$ 이면 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$에 대하여 $g(a^n)=ng(a)$ 이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\log 200=2+\log 2$에서 $f(200)=2,\ g(200)=\log 2$
$\therefore f(200)-g(200)=2-\log 2$ (참)
㉡ [반례] $a=10^{1.6}$ 이라 하면 $\log a^2=\log 10^{3.2}=3.2$에서
$f(a^2)=3,\ g(a^2)=0.2$
$\log a^3=\log 10^{4.8}$에서 $f(a^3)=4,\ g(a^3)=0.8$ (거짓)
㉢ $\log a=f(a)+g(a)(0\le g(a)<1)$에서 $\log a^5=5f(a)+5g(a)$
그런데 $f(a^5)=5f(a)$ 이므로 $5g(a)$가 $\log a^5$의 소수 부분이다.
즉, $0\le 5g(a)<1$이므로 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$에 대하여 $0\le ng(a)<1$
따라서 $\log a^n=nf(a)+ng(a)$ 에서
$f(a^n)=nf(a),\ g(a^n)=ng(a)$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢ 이다.

24. 2^{30} 의 최고 자리의 숫자를 a, 일의 자리의 숫자를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$)

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$\log 2^{30} = 30\log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$
이므로 $\log 2^{30}$ 의 가수는 0.03이다.
$\log 1 = 0$, $\log 2 = 0.3010$이므로
$\log 1 < 0.03 < \log 2$
$9 + \log 1 < 9.03 < 9 + \log 2$
$\log(1 \times 10^9) < \log 2^{30} < \log(2 \times 10^9)$
따라서 $1 \times 10^9 < 2^{30} < 2 \times 10^9$ 이므로
2^{30} 의 최고 자리의 숫자는 1이다.
$\therefore a = 1$
한편, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256, \cdots$
이므로 2^n 의 일의 자리의 숫자는 $2, 4, 8, 6$이 반복된다.
$30 = 4 \times 7 + 2$이므로 2^{30} 의 일의 자리의 숫자는 2^2 의 일의 자리의 숫자와 같다.
$\therefore b = 4$
$\therefore a + b = 1 + 4 = 5$

25. 자연수 n과 k에 대하여 $f_k(n) = n - 10^k \left[\frac{n}{10^k}\right]$ 이라고 할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

보기

㉠ $f_1(n)$은 n의 일의 자리 숫자이다.

㉡ $f_2(n)$은 n의 십의 자리 숫자이다.

㉢ $f_k(n) = n$이면 $[\log n] < k$이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\left[\frac{n}{10}\right]$은 n을 10으로 나눈 몫이다.
즉, $f_1(n)$은 n을 10으로 나눈 나머지이다.

㉡ $\left[\frac{n}{100}\right]$은 n을 100으로 나눈 몫이다.
즉, $f_2(n)$은 n을 100으로 나눈 나머지이다.

㉢ $f_k(n) = n - 10^k \left[\frac{n}{10^k}\right] = n$이면, $\left[\frac{n}{10^k}\right] = 0$이므로 $n < 10^k$
$\therefore [\log n] < k$

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.