1. 첫째항이 7, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에서 -20은 몇째 항인가?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\times(-3) \\ &= 7 + (n-1)\times(-3) \end{aligned}$$

$\therefore a_n = -3n + 10$

$-3n + 10 = -20$

$-3n = -30$

$n = 10$

2. 등차수열 $10,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{99},\ -390$ 에서 공차는?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$b_1 = 10,\ b_2 = a_1,\ b_3 = a_2,\ \cdots,$

$b_{100} = a_{99},\quad b_{101} = -390$

$\therefore\ b_{101} = 10 + (101-1) \cdot d = -390$

$100d = -400$

$\therefore\ d = -4$

3. 수열 $1,\ a,\ \frac{1}{16},\ b, \cdots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

첫째항$= 1$, 공비$= a$

$a_n = a^{n-1}$

$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm\frac{1}{4}$

$a_4 = a^3 = \pm\frac{1}{64} = b$

$\therefore \frac{\pm\frac{1}{4}}{\pm\frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16$($\because$복호동순)

4. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 5n - 1$일 때, $a_1 + a_3 + a_5$의 값은?

① 21　② 23　③ 25　④ 27　⑤ 29

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + 5n - 1 - \{(n-1)^2 + 5(n-1) - 1\}$

$= 2n + 4$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 1 + 5 - 1 = 5$

그런데 이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같지 않으므로

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 2n + 4\ (n \geq 2),\ a_1 = 5$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = 5 + 10 + 14 = 29$

5. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합이 5, 첫째항부터 제 20항까지의 합이 30일 때, 첫째항부터 제 30항까지의 합은?

① 124　② 132　③ 145　④ 155　⑤ 162

해설

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 5$$

$$S_{20} = \frac{a(r^{20}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1} = 30$$

$r^{10}+1 = 6$이므로 $r^{10} = 5$

$$S_{30} = \frac{a(r^{30}-1)}{r-1}$$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$이므로

$$\begin{aligned} S_{30} &= \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1} \\ &= 5\cdot(r^{20}+r^{10}+1) \\ &= 5\cdot(5^2+5+1) \\ &= 5\cdot 31 = 155 \end{aligned}$$

6. $S = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \sum_{k=3}^{10} k + \cdots + \sum_{k=9}^{10} k + \sum_{k=10}^{10} k$ 일 때, $\frac{1}{5}S$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 77

해설

$S = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=2}^{10} k + \sum_{k=3}^{10} k + \cdots + \sum_{k=9}^{10} k + \sum_{k=10}^{10} k$

$= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10$

$+2 + 3 + 4 + \cdots + 10$

$3 + 4 + \cdots + 10$

$\vdots$

$+10$

$= 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 10^2$

$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$

$\therefore \ \frac{1}{5}S = 77$

7. 수열 $1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7, \cdots$ 의 계차수열을 $\{a_n\}$이라고 할 때, 다음 중 $\sum_{k=1}^{n} b_k$를 나타내는 식은?

① n^2　② n^2+2　③ n^2+n+1
④ n^2+2n　⑤ n^2+2n+3

해설

수열$\{a_n\}$은 $3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots$ 이므로
$b_n = 2n+1$
$\therefore \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)$
$= 2 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + n$
$= n^2 + 2n$

8. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 일반항 a_n은?

① 2^{n-1} ② $2^{n-1} + n - 1$ ③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$ ⑤ $2^{n+1} - 3$

해설

$a_{n+1} = a_n + 2^n$의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ (n-1)$을 대입하여 변끼리 더하면

$$
\begin{aligned}
& a_2 = a_1 + 2 \\
& a_3 = a_2 + 2^2 \\
& \quad \vdots \\
+)\ & \underline{a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}} \\
& a_n = a_1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
& \quad = a_1 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\
& \quad = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
& \quad = \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\
& \quad = 2^n - 1
\end{aligned}
$$

9. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 일 때, 일반항 a_n은?

① $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　③ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \frac{1}{2}$
④ 2^{n-1}　⑤ $2^n - 1$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$을 $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\alpha}{2}$에서 $\frac{\alpha}{2} = 1 \quad \therefore \alpha = 2$

즉, $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

따라서 수열 $\{a_n - 2\}$는 첫째항이 $a_1 - 2 = -1$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

10. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항은?

① $\dfrac{1}{n}$ ② $\dfrac{1}{n+1}$ ③ $\dfrac{1}{n+2}$ ④ $\dfrac{2}{n}$ ⑤ $\dfrac{2}{n+1}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ 의 양변을 역수로 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 1$, 즉 $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 1$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1} = 1$이고, 공차가 1인 등차수열이므로

$\dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1)\cdot 1 = n \quad \therefore a_n = \dfrac{1}{n}$

11. 실수 $a,\ b$에 대하여 $2^a = 3,\ 2^b = 45$일 때, 2^{2a-b}의 값은?

① 5　② 4　③ 3　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$2^{2a-b} = 2^{2a} \cdot 2^{-b} = (2^a)^2(2^b)^{-1}$

$= 3^2 \times \frac{1}{45}$

12. $x=\sqrt{7+\sqrt{33}},\ y=\sqrt{7-\sqrt{33}}$ 일 때, $\log_2 x+\log_2 y$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy$

$=\log_2\sqrt{7+\sqrt{33}}\sqrt{7-\sqrt{33}}$

$=\log_2\sqrt{49-33}=\log_2\sqrt{16}$

$=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

13. $\log_2 x + \log_2 y = \dfrac{3}{2}$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여, $x + 2y$ 의 최솟값을 m 이라 하고 그때의 x, y 의 값을 각각 a, b 라 하자. 이때, $\dfrac{am}{b}$ 의 값은?

① $2^{\frac{5}{4}}$　② $2^{\frac{3}{2}}$　③ $2^{\frac{9}{4}}$　④ $2^{\frac{5}{2}}$　⑤ $2^{\frac{13}{4}}$

해설

$\log_2 x + \log_x y = \log_2 xy = \dfrac{3}{2}$ $\therefore xy = 2^{\frac{3}{2}}$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x + 2y \geq 2\sqrt{2xy} = 2\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{2^{\frac{5}{2}}} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{9}{4}}$

따라서 $x + 2y$ 의 최솟값은 $2^{\frac{9}{4}}$ 이다.

(단, 등호는 $x = 2^{\frac{5}{4}}, y = 2^{\frac{1}{4}}$ 일 때 성립한다.)

$a = 2^{\frac{5}{4}}, b = 2^{\frac{1}{4}}, m = 2^{\frac{9}{4}}$

$\dfrac{am}{b} = 2^{\left(\frac{5}{4}+\frac{9}{4}\right)-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{13}{4}}$

14. $10^a = 2,\ 10^b = 3$일 때, $\log_{15} 10$을 $a,\ b$로 나타내면?

① $\dfrac{1}{a+b+1}$ ② $\dfrac{1}{a-b+1}$ ③ $\dfrac{1}{a+b-1}$
④ $\dfrac{1}{b-a+1}$ ⑤ $\dfrac{1}{b-a-1}$

해설

$10^a = 2,\ 10^b = 3$에서 $a = \log_{10} 2,\ b = \log_{10} 3$

$\log_{15} 10 = \dfrac{1}{\log_{10} 15}$

한편, $\log_{10} 15 = \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 3 + \log_{10} \dfrac{10}{2}$

$= \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2 = b - a + 1$

$\therefore\ \log_{15} 10 = \dfrac{1}{b-a+1}$

15. 현주는 이번 달 휴대전화의 사용 요금으로 20,000원을 납부하였다. 매월 사용 요금이 3%씩 증가한다고 할 때, 9개월 후에 현주가 납부할 휴대전화 사용 요금을 주어진 상용로그표를 이용하여 구하면?

<상용로그표>

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	비례부분								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27

① 약 25,400원 ② 약 25,560원 ③ 약 26,080원

④ 약 26,400원 ⑤ 약 28,380원

해설

1달 후 사용요금은 $20000(1+0.03)$

2달 후 사용요금은 $20000(1+0.03)^2$

$\vdots$

9달 후 사용요금은 $20000(1+0.03)^9$

상용로그표에서 비례부분을 이용하여 계산하면

$\log 1.30 = 0.1139$

$\underline{\qquad 4 \leftarrow \quad 13}$

$\log 1.304 = 0.1152$

$\log 1.03^9 = 9\log 1.03$

$= 0.1152$

$= \log 1.304$

$1.03^9 = 1.304$이므로

$20000 \times 1.304 = 26080$(원)

16. 첫째항이 37, 공차가 -5 인 등차수열이 있다. 첫째항부터 제20항까지 각 항의 절댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 522

해설

주어진 수열의 제 n항이 음수가 된다고 하면

$a_n = 37 + (n-1) \cdot (-5) < 0$

$-5n + 42 < 0,\ n > \dfrac{42}{5} = 8.4$

$\therefore\ n = 9,\ 10,\ 11, \cdots$

따라서 주어진 수열은 제9항부터 음수가 되고, 이때

$a_8 = -5 \cdot 8 + 42 = 2$

$a_9 = -5 \cdot 9 + 42 = -3$

$a_{20} = -5 \cdot 20 + 42 = -58$

이므로 구하는 합은

$(37 + 32 + 27 + \cdots + 2) + (|-3| + |-8| + |-13| + \cdots + |-58|)$

$= \dfrac{8(37+2)}{2} + \dfrac{12(3+58)}{2} = 156 + 366 = 522$

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다.
$a_n = 2n + 1,\ b_n = 3n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 공통인 항을 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$이라 한다. 이때, C_{20}의 값을 구하여라.

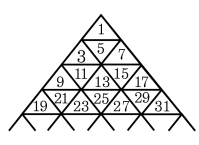
▶ 답 :

▷ 정답 : 119

해설

$a_2 = b_1 = 5,\ a_5 = b_3 = 11,\ a_8 = b_5 = 17, \cdots$ 이므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열이다.
$\therefore\ c_{20} = 5 + 19 \cdot 6 = 119$

18. 오른쪽 그림과 같이 홀수를 삼각형 모양의 표에 배열한다. 위로부터 m단 째에 있고, 그 단의 왼쪽으로부터 n번째에 있는 수를 순서쌍$(m,\ n)$으로 나타낼 때, $(m,\ n) = 2015$을 만족하는 순서쌍은?



① $(32,\ 33)$　　② $(32,\ 37)$　　③ $(32,\ 47)$

④ $(33,\ 37)$　　⑤ $(37,\ 32$

해설

$2n-1 = 2015$에서 $n = 1008$이므로 2015은 1008번째 홀수이고,
각 단을 군으로 나눌 때 제n군까지의 항수는
$1 + (3+5+7) + 9 + \cdots + (2n-1) = n^2$
이때, $961 = 31^2 < 1008 < 32^2 = 1024$에서 2015는 제32군의 47번째 수이므로 구하는 순서쌍은 $(32,\ 47)$이다

19. 모든 자연수 n에 대하여 6^n-5n-1은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한것이다. $\boxed{}$안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

> 6^n-5n-1은 25의 배수이다. ······㉠
>
> (i) $n=1$일 때, $6-5-1=0$이므로 $\boxed{}$의 배수이다.
> 따라서 $n=1$일 때, ㉠이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉, 6^k-5k-1이 25의 배수이면
> $6^{k+1}-5(k+1)-1=\boxed{}(6^k-5k-1)+25k$는 $\boxed{}$의 배수이므로 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.
> 따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

▶ 답:

▷ 정답: 56

해설

$25+6+25=56$

20. $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$일 때 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$의 값은 a이고, $x+x^{-1}=7$ 일 때 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$의 값은 b이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $53+2\sqrt{2}$

해설

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3=4^3$
$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=64$
$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=64-3\cdot 4=52$
$\therefore a=52$
$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=b^2$
$x+x^{-1}+2(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}})=b^2$
$7+2b=b^2$
$b^2-2b-7=0$
$b=1\pm 2\sqrt{2}$ 그런데 $b>0$이므로
$b=1+2\sqrt{2}$ $\therefore a+b=53+2\sqrt{2}$

21. 어떤 교육심리학자는 아무 의미가 없는 음절(예를 들면 “강릉동룡”)을 학생에게 들려주고 시간이 흐른 후 그 음절을 다시 기억하게 하는 실험을 하였다. 이 실험에 참가한 학생 1000명 중 t분 후에 정확하게 음절을 기억한 학생의 비율을 $p\%$라 할 때, $p = 92 - 28\log_5 t\,(t \ge 1)$가 성립하였다고 한다. 이 실험에 참가한 학생 1000명 중 10분 후에 정확하게 음절을 기억하는 학생 수를 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 520

해설

$p = 92 - 28\log_5 t$에 $t = 10$을 대입하면

$p = 92 - 28\log_5 10$

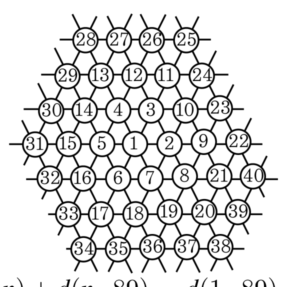
$= 92 - 28 \times \dfrac{1}{\log 5}$

$= 92 - 28 \times \dfrac{1}{1 - \log 2}$

$= 92 - 28 \times \dfrac{1}{1 - 0.3} = 52(\%)$

따라서 구하는 학생 수는 $1000 \times 0.52 = 520$(명)이다.

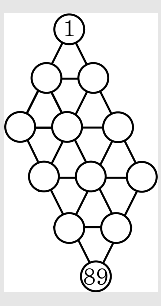
22. 평면 위에 한 변의 길이가 1인 정삼각형들이 그물 모양으로 서로 연결되어 있다. 다음 그림과 같은 규칙으로 1에서부터 출발하여 차례대로 꼭짓점에 자연수를 적어 갈 때, 자연수 k가 적힌 꼭짓점에서 변을 따라 자연수 n이 적힌 꼭짓점까지 가는 최단 거리를 $d(k,n)$이라 하자. 예를 들면 $d(2,\ 5)=2$, $d(4,\ 18)=3$이다. 이 때, $d(1,\ n)+d(n,\ 89)=d(1,\ 89)$를 만족하는 자연수 n의 개수는? (단, $n \neq 1, n \neq 89$)



① 1　② 5　③ 8　④ 10　⑤ 15

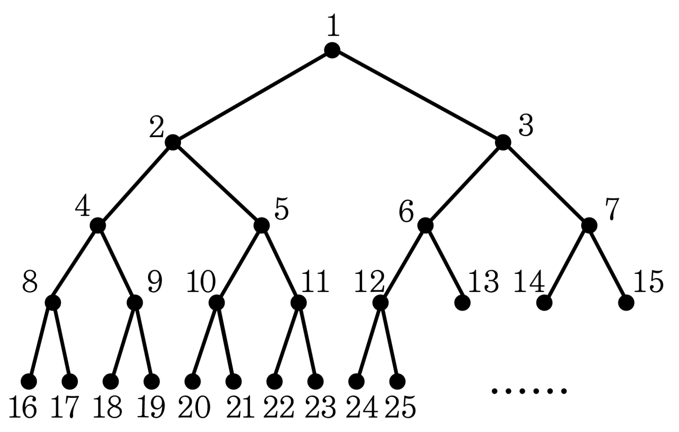
해설

등식 $d(1,n)+d(n,89)=d(1,89)$를 만족하는 n이 적힌 꼭짓점은
1에서 89까지 가는 최단 경로 위의 점이어야 한다. 오른쪽 그림과
같이 1이 적힌 점을 중심으로 하고 한 변의 길이가 n인 정육각형의
밑변의 오른쪽 꼭짓점에 있는 수의 수열을 $\{a_n\}$이라 하면



$\{a_n\}=1,\ 7,\ 19,\ 37,\ \cdots$
이 수열의 계차수열은 $6,\ 12,\ 18,\ \cdots$ 이므로
$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1} 6k = 1+3n(n-1)$
이 때, $a_6 = 1+3\cdot 6\cdot 5 = 91$인데 89는 91에서 왼쪽으로 2만큼 떨어져 있는 점이다.
즉, 1과 89의 위치 관계는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 1과 89까지 가는 최단 경로 위에 있는 점의 개수는 $3\times 4-2=10$이므로
자연수 n의 개수도 10이다.
$\therefore n=10$

23. 아래 그림과 같이 각각의 점에 1부터 연속된 자연수를 규칙적으로 대응시키고 이 점들을 선분으로 연결한다.



서로 다른 두 자연수 a와 b에 대응되는 두 점을 연결하는 선분들의 최소 개수를 $N(a,\ b)$라 하자. 예를 들면 $N(4,\ 6)=4$이고 $N(12,\ 27)=3$이다.
$N(32,\ 33)+N(32,\ 34)+N(32,\ 35)+\cdots+N(32,\ 63)$의 값은?

① 196 ② 258 ③ 270 ④ 312 ⑤ 344

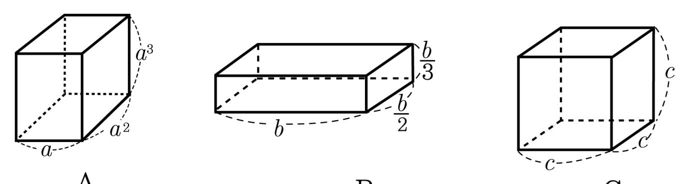
해설

열의 맨 오른쪽 수를 나열하여 계차수열을 생각해 보면
$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$
$\vee\ \vee\ \vee\ \vee$
$2\ \ 4\ \ 8\ \ 16\cdots$
이므로 위에서 5번째 열의 맨 끝의 수는 63임을 알 수 있다.
서로 다른 두 자연수 a와 b에 대응되는 두 점을 연결하는 선분들의 최소 개수가 $N(a,\ b)$이므로
$N(32,\ 33)+N(32,\ 34)+N(32,\ 35)+\cdots+N(32,\ 63)$
$=2+(4+4)+(6+6+6+6)+\underbrace{(8+\cdots+8)}_{8\text{개}}+\underbrace{(10+10+\cdots+10)}_{16\text{개}}$
$=2+4\times2+6\times4+8\times8+10\times16=258$

해설

그림에서
n
/\
$2n$ $2n+1$ 인 관계가 있고, 서로 다른 두 자연수 $a,\ b$에 대응되는 두 점을 연결하는 선분들의 최소 개수가
$N(a,\ b)$이므로
$N(32,\ 33)=2$
$N(32,\ 34)=N(32,\ 35)=4$
$N(32,\ 36)=N(32,\ 37)=N(32,\ 38)=N(32,\ 39)=6$
$N(32,\ 40)=N(32,\ 41)=\cdots=N(32,\ 47)=8$
$N(32,\ 48)=N(32,\ 49)=\cdots=N(32,\ 63)=10$이다.
$\therefore N(32,\ 33)+N(32,\ 34)+N(32,\ 35)+\cdots N(32,\ 63)$
$=2+4\times2+6\times4+8\times8+10\times16=258$

24. 다음 그림과 같은 직육면체 A, B, C 각각의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 순서쌍으로 나타내면 $(a,\ a^2,\ a^3)$, $\left(b,\ \frac{b}{2},\ \frac{b}{3}\right)$, $(c,\ c,\ c)$이다. 직육면체 A, B, C의 부피를 각각 4, 9, 16이라고 할 때, 가로의 길이 a, 세로의 길이 b, 높이 c인 직육면체의 부피를 구하여라.



A　　B　　C

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$a \cdot a^2 \cdot a^3 = 4$에서 $a^6 = 4,\ a^3 = 2 \therefore a = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

$b \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{3} = 9$에서 $\frac{b^3}{6} = 9,\ b^3 = 54$

$\therefore b = \sqrt[3]{54} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$c \cdot c \cdot c = 16$에서 $c^3 = 16$

$\therefore c = \sqrt[3]{16} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

따라서, 가로의 길이 a, 세로의 길이 b, 높이 c인 직육면체의 부피는 $abc = \left(2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) = 12$

25. 세 자연수 x, y, z가 $x\log_{200}5+y\log_{200}2=z$를 만족할 때, x, y, z의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $x<y<z$　② $x<z<y$　③ $y<x<z$
④ $z<x<y$　⑤ $z<y<x$

해설

$x\log_{200}5+y\log_{200}2=z$에서
$\log_{200}5^x+\log_{200}2^y=z$
$\log_{200}5^x\cdot 2^y=z$
$5^x\cdot 2^y=200^z=(2^3\cdot 5^2)^z=2^{3z}\cdot 5^{2z}$
따라서 $x=2z, y=3z$이므로
$x:y:z=2z:3z:z=2:3:1$
$\therefore z<x<y$