

1. 16의 네제곱근 중 실수인 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2, 2$

해설

16의 네제곱근은
 $x^4 = 16$ 를 만족하는 x 의 값이므로
 $x^4 - 16 = 0$ 에서
 $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
 $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$
 $\therefore x = -2, 2, 2i, -2i$
따라서 16의 네제곱근 중 실수인 것은
 $-2, 2$

2. $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$ 을 2^k 꼴로 나타낼 때 k 는?

- ① $\frac{11}{12}$ ② $\frac{11}{24}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{23}{24}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}} \\ &= \{2 \times (4 \times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{2 \times (2^2 \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{2 \times (2^{\frac{11}{4}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= (2 \times 2^{\frac{11}{12}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{23}{12}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{23}{24}} \\ \therefore k &= \frac{23}{24} \end{aligned}$$

3. $6^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은?

- ① 9 ② 18 ③ 27 ④ 36 ⑤ 45

해설

$$\begin{aligned} 6^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} &= (2 \times 3)^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{3}{3}} \times 3^{\frac{6}{3}} \\ &= 2 \times 3^2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

4. $\log_2 6 - \log_2 \frac{3}{2}$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② -1 ③ 1 ④ -2 ⑤ 2

해설

로그의 성질에 의하여
 $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_2 6 - \log_2 \frac{3}{2} &= \log_2 \left(6 \div \frac{3}{2} \right) \\ &= \log_2 \left(6 \times \frac{2}{3} \right) = 2\end{aligned}$$

5. $\log_2 x = \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} y = 2$ 일 때, $\log_x y$ 의 값은?

- ① -4 ② -1 ③ $\frac{1}{4}$ ④ 1 ⑤ 4

해설

$$\log_{\frac{1}{2}} y = -\log_2 y = 2 \text{ 이므로}$$

$$\log_x y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$$

6. 제3항이 11, 제9항이 29인 등차수열의 20번째 항은?

- ① 60 ② 62 ③ 64 ④ 66 ⑤ 68

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = 11 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_9 = a + 8d = 29 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = 5, d = 3$$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$$

$$\text{따라서 20번째 항은 } 3 \times 20 + 2 = 62$$

7. 수열 $1, -10, 10^2, -10^4, \dots$ 은 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열이다. 이 때, $a+r$ 의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

해설

$$a = 1, r = -10$$

$$\therefore a + r = -9$$

8. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 = 64$ 일 때, a_4 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$$\begin{aligned} a_n &= a \cdot r^{n-1} \\ a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 &= a \times ar^2 \times ar^7 = a^3 r^9 \\ a^3 r^9 &= (ar^3)^3 = 64 = 4^3 \\ \therefore ar^3 &= 4 \\ \therefore a_4 &= 4 \end{aligned}$$

9. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a + b + c + d$ 의 값은?(단, a, b, c, d 는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

- ① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$$a + b + c + d = 9 + 6 + 4 + 36 = 55$$

10. 수열 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + \dots + x^{2n-1}$ 의 합은? (단, $x \neq 1$)

- ① $2n$ ② $\frac{x^{2n}}{x-1}$ ③ $\frac{x^{2n}-1}{x-1}$
④ $\frac{x^{2n}-1}{x}$ ⑤ $\frac{x^{2n}+1}{x-1}$

해설

첫째항이 1, 공비가 x , 항수가 $2n$ 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{1 \cdot (x^{2n} - 1)}{x - 1} = \frac{x^{2n} - 1}{x - 1}$$

11. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$$\begin{aligned} S &= (3\text{의 배수의 총합}) + (5\text{의 배수의 총합}) - (15\text{의 배수의 총합}) \\ &= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195) \\ &= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} \\ &\quad - \frac{7(105 + 195)}{2} \\ &= 47 \cdot 150 \\ \therefore \frac{1}{150} S &= 47 \end{aligned}$$

12. $a_n = 2n^2 + n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 인 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 250

해설

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= \{2(n+1)^2 + (n+1)\} - (2n^2 + n) \\ &= 4n + 3 \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} b_k &= \sum_{k=1}^{10} (4k + 3) \\ &= 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 3 \cdot 10 \\ &= 250 \end{aligned}$$

13. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행	1
제2행	3 5 7
제3행	9 11 13 15 17
제4행	19 21 23 25 27 29 31
⋮	⋮

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.
 (1) 제1군, (3, 5, 7) 제2군, (9, 11, 13, 15, 17) 제3군, ... 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면
 $\{a_n\} : 1, 3, 9, 19, \dots$
 $\{b_n\} : 2, 6, 10, \dots$
 $\therefore b_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$
 $\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k-2) = 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$
 $\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$
 이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는
 $163 + (5-1) \times 2 = 171$

14. $a = \frac{\log_3(\log_5 7)}{2 \log_3 2}$ 일 때, 4^a 의 값은?

- ① $\log_5 7$ ② $\log_3 5$ ③ $3^{\log_5 2}$ ④ $3^{\log_5 5}$ ⑤ $3^{\log_5 7}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \frac{\log_3(\log_5 7)}{2 \log_3 2} \\ &= \frac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 2^2} \\ &= \frac{\log_3(\log_5 7)}{\log_3 4} = \log_4(\log_5 7) \\ \therefore 4^a &= \log_5 7 \end{aligned}$$

15. $2^x = a$, $2^y = b$ 일 때, $\log_{2ab} a^3 b^2$ 을 x , y 로 나타내면?

- ① $\frac{3x+2y}{1+x+y}$ ② $\frac{2x+3y}{2+x+y}$ ③ $\frac{2+x+y}{3x+2y}$
④ $\frac{x^2 y^2}{4xy}$ ⑤ $\frac{4xy}{x^3 y^2}$

해설

$$\begin{aligned} 2^x = a, 2^y = b \text{ 이므로} \\ \log_{2ab} a^3 b^2 &= \log_{2 \cdot 2^x \cdot 2^y} (2^x)^3 \cdot (2^y)^2 \\ &= \log_{2^{1+x+y}} 2^{3x+2y} \\ &= \frac{3x+2y}{1+x+y} \log_2 2 = \frac{3x+2y}{1+x+y} \end{aligned}$$

16. $A = (\log_3 9)(\log_4 9 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3})$, $B = (\log_{\sqrt{3}} 5 + \log_9 5)(\log_5 64 + \log_{25} 8)$

일 때, AB 의 값은?

- ① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{74}{5}$ ③ $\frac{49}{3}$ ④ 67 ⑤ 75

해설

$$\begin{aligned}
 A &= (\log_3 9)(\log_4 9 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}) \\
 &= (\log_3 3^2)(\log_4 3^2 + \log_{2^{-1}} 3^{-1}) \\
 &= (2 \log_3 3^2)(\frac{2}{2} \log_2 3 + \frac{-1}{-1} \log_2 3) \\
 &= 2(\log_2 3 + \log_2 3) = 2 \cdot \log_2 3 = 4 \log_2 3 \\
 \\
 B &= (\log_{\sqrt{3}} 5 + \log_9 5)(\log_5 64 + \log_{25} 8) \\
 &= (\log_{3^{\frac{1}{2}}} 5 + \log_{3^2} 5)(\log_5 2^6 + \log_{5^2} 2^3) \\
 &= (2 \log_3 5 + \frac{1}{2} \log_3 5)(6 \log_5 2 + \frac{3}{2} \log_5 2) \\
 &= \frac{5}{2} \log_3 5 \cdot \frac{15}{2} \log_5 2 \\
 &= \frac{75}{4} \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2 \\
 &= \frac{75}{4} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5} \\
 &= \frac{75}{4} \cdot \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{75}{4} \log_3 2 \\
 \therefore AB &= 4 \log_2 3 \cdot \frac{75}{4} \log_3 2 \\
 &= 4 \cdot \frac{75}{4} \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 75
 \end{aligned}$$

17. 두 양수 $A, \frac{1}{A}$ 의 상용로그에서 정수 부분의 합은 a 이고, 소수 부분의 합은 b 이다. 이때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $\log A$ 의 소수 부분은 0이 아니다.)

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 < \alpha < 1$)라 하면
 $\log \frac{1}{A} = -\log A = -n - \alpha = (-n - 1) + (1 - \alpha)$ 이므로
정수 부분은 $-n - 1$, 소수 부분은 $1 - \alpha$
이때, 정수 부분의 합은 -1 , 소수 부분의 합은 1이다.
 $\therefore a^2 + b^2 = 2$

18. 첫째항이 3이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 이 수열의 처음 n 개의 항의 합이 다음 n 개의 항의 합의 $\frac{1}{3}$ 과 같을 때, d 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면 문제의 조건으로부터

$$S_n = \frac{1}{3}(S_{2n} - S_n), \quad 3S_n = S_{2n} - S_n$$

$$\therefore S_{2n} = 4S_n$$

$$\frac{2n\{2 \cdot 3 + (2n-1)d\}}{2} = 4 \cdot \frac{n\{2 \cdot 3 + (n-1)d\}}{2}$$

$$6 + (2n-1)d = 2\{6 + (n-1)d\} \quad (n \neq 0)$$

$$6 + 2nd - d = 12 + 2nd - 2d$$

$$\therefore d = 6$$

19. 원산지에서 생산되는 참외 가격은 도매상에서 중간상인을 거칠 때마다 일정한 비율로 오른다. 소비자에게 판매하기까지 중간 상인을 5번 거칠 때 참외 가격이 원산지 가격의 5배가 되었다고 한다. 유통과정을 개선하여 중간상인을 2번 거치게 하면 소비자에게 판매되는 가격은 원산지 가격의 약 몇 배가 되는가?(단, $\sqrt[5]{5} = 1.38$ 로 계산한다.)

- ① 약 1.2배 ② 약 1.5배 ③ 약 1.9배
④ 약 2.5배 ⑤ 약 3.4배

해설

원산지의 참외 가격은 중간상인을 한 번 거칠 때마다 일정한 비율로 오르므로 처음 가격을 a , 중간상인을 거칠 때마다 r 배가 된다고 하자. 중간상인을 5번 거친 후 원산지 가격의 5배가 되었으므로

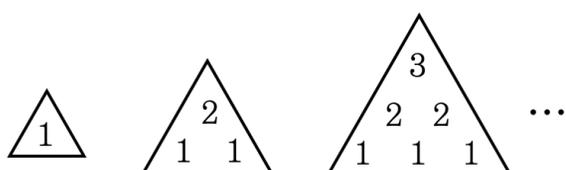
$$ar^5 = 5a$$

$$r^5 = 5$$

$$r^2 = (r^5)^{\frac{2}{5}} = 5^{\frac{2}{5}} = (\sqrt[5]{5})^2$$

$$\therefore r^2 = 1.38^2 = 1.9044$$

20. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 n 인 정삼각형의 내부에 다음과 같은 규칙적으로 숫자를 배열한다.



이때, 10번째 정삼각형 안에 적혀 있는 수의 총합은?

- ① 440 ② 330 ③ 220 ④ 110 ⑤ 90

해설

$$\begin{aligned}
 & \text{10번째 정삼각형 안에 적혀 있는 수의 총합은} \\
 & 1 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + \cdots + 10 \cdot 1 \\
 & = \sum_{k=1}^{10} k(11-k) = \sum_{k=1}^{10} (11k - k^2) \\
 & = 11 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} k^2 \\
 & = 11 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} \\
 & = 605 - 385 = 220
 \end{aligned}$$

21. $s = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{19 \cdot 20}$ 일 때, $100s$ 의 값은?

- ① 95 ② 100 ③ 105 ④ 110 ⑤ 115

해설

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{19 \cdot 20} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \\ &= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} \\ \therefore 100s &= 100 \times \frac{19}{20} = 95 \end{aligned}$$

22. $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 자연수)이다. 이때, $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 69

해설

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 계차 수열의 일반항은 $\frac{1}{n(n+1)}$ 이다.

$$\begin{aligned} a_n &= 5 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 5 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 5 \\ &+ \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= 5 + 1 - \frac{1}{n} = 6 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

따라서, $a_{10} = \frac{59}{10}$ 이므로 $m+n = 69$

23. 실험 용기 안에 박테리아가 5마리 있다. 이 박테리아는 한 시간마다 두 마리가 죽고 나머지는 두 배로 증식한다고 한다. 정확히 하루가 지났을 때, 살아 있는 박테리아는 모두 몇 마리인가?

- ① $2^{24} - 4$ ② $2^{24} - 2$ ③ 2^{24}
④ $2^{24} + 2$ ⑤ $2^{24} + 4$

해설

n 시간 후의 개체 수를 a_n 이라 하면 $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_{n+1} = 2(a_n - 2)$ 의 관계가 성립한다.

이 점화식을 변형하면

$$a_{n+1} - 4 = 2(a_n - 4)$$

이때, $a_n - 4 = b_n$ 이라 하면 $\{b_n\}$ 는 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열을 이루므로

$$b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

$$\therefore a_n = 2^n + 4$$

$$a_{24} = 2^{24} + 4$$

24. $2^{20} \cdot 3^{30}$ 의 맨 첫 자리의 수를 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} & \log(2^{20} \cdot 3^{30}) \\ &= 20 \times \log 2 + 30 \times \log 3 \\ &= 20.333 \\ &20.3010 < 20.333 < 20.4771 \\ &\log(10^{20} \times 2) < \log(2^{20} \cdot 3^{30}) < \log(10^{20} \times 3) \\ &2 \times 10^{20} < 2^{20} \cdot 3^{30} < 3 \times 10^{20} \\ &\text{이므로 첫 자리의 수는 } 2 \end{aligned}$$

25. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sqrt{17}-4 = \frac{1}{8+a_1} = \frac{1}{8+\frac{1}{8+a_2}} = \frac{1}{8+\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_3}}} =$

... 일 때, a_{2014} 의 값은?

- ① $\sqrt{17}-4$ ② $3-\sqrt{17}$ ③ $5-\sqrt{17}$
 ④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{17+4}$

해설

$$\begin{aligned} \sqrt{17}-4 &= \frac{1}{8+a_1} \\ 8+a_1 &= \frac{1}{\sqrt{17}-4} = \sqrt{17}+4 \\ a_1 &= \sqrt{17}-4 \\ \text{그런데 } a_1 &= \frac{1}{8+a_2} \text{ 이므로} \\ a_n &= \frac{1}{8+a_{n+1}} \\ a_{n+1}+8 &= \frac{1}{a_n} \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{1}{a_n}-8 \\ a_2 &= \frac{1}{a_1}-8 = \frac{1}{\sqrt{17}-4}-8 \\ &= \sqrt{17}+4-8 = \sqrt{17}-4 \\ a_3 &= \frac{1}{a_2}-8 = \frac{1}{\sqrt{17}-4}-8 \\ &= \sqrt{17}-4 \\ \therefore a_1 &= a_2 = a_3 = \dots = a_n \\ &= \sqrt{17}-4 \\ \therefore a_{2014} &= \sqrt{17}-4 \end{aligned}$$