1. $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ 의 제 10항은?

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{1}{11}$ ③ $\dfrac{1}{110}$ ④ $\dfrac{1}{111}$ ⑤ $\dfrac{1}{1010}$

해설

$$\frac{1}{10\cdot 11}=\frac{1}{110}$$

2. 첫째항이 8, 공차가 -7 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $-7n+1$ ② $-7n+15$ ③ $-7n-15$

④ $7n+15$ ⑤ $7n-15$

해설

$$a_n = 8+(n-1)\cdot(-7) = -7n+15$$

3. $3^x = 2$일 때, $(\frac{1}{9})^{-x}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(\frac{1}{9})^{-x} = (3^{-2})^{-x} = 3^{2x} = (3^x)^2 = 4$

4. $\log_3(\log_4 x) = 1$ 일 때, x 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 12 ④ 27 ⑤ 64

해설

$\log_3(\log_4 x) = 1$ 에서 $\log_4 x = 3$

$\therefore x = 4^3 = 64$

5. $\log_3 \sqrt{6} - \frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{5} - \frac{3}{2}\log_3 \sqrt[3]{30}$을 계산하면?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}\log_3 2$ ⑤ $-\frac{1}{2}\log_3 2$

해설

$$\log_3 \sqrt{6} - \frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{5} - \frac{3}{2}\log_3 \sqrt[3]{30}$$

$$= \frac{1}{2}\log_3 6 + \frac{1}{2}\log_3 5 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\log_3 30$$

$$= \frac{1}{2}(\log_3 6 + \log_3 5 - \log_3 30)$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\log_3 30 - \log_3 30) = 0$$

6. 첫째항이 6, 공차가 -5 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 -44는 제 몇 항인가?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

첫째항이 6 이고, 공차가 5 이므로 일반항은 a_n 은

$a_n = 6 + (n-1)\cdot(-5) = -5n + 11$

$-5n + 11 = -44$

$5n = 55 \quad \therefore \; n = 11$

7. 등비중항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, $\square$안에 알맞은 수를 모두 더하면?

$$-2,\ \square,\ -8,\ \square,\ \square,\ 64,\cdots$$

① -11　② -12　③ 11　④ 12　⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b라 하면 $b^2=(-2)\times(-8)$, $b^2=16$

따라서 $b=4$이고 공비는 -2인 수열이 되므로 구하는 수열은

$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ 64,\ \cdots$

$\therefore\ 4+16-32=-12$

8. $4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2989

해설

$4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10} k^3-\sum_{k=1}^{3} k^3$

$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2$

$=3025-36=2989$

9. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$의 값은?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$
$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$
$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$
$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

10. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 12이고, 곱이 28일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-b,\ a,\ a+b$라 하면 세 수의 합이 12이므로

$(a-b)+a+(a+b)=12,\ 3a=12$

$\therefore a=4$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$(4-d)\times 4\times(4+d)=28,\ 16-d^2=7$

$d^2=9\ \ \therefore d=\pm 3$

따라서 구하는 세 수는 $1, 4, 7$이므로 이 중 가장 큰 수는 7이다.

11. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
$= (2n^2 - n) - \left\{2(n-1)^2 - (n-1)\right\}$
$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$n = 1$일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$
따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로
$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$
$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$
$= 8 \cdot \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \dfrac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$
$= 440 - 30 - 15 = 395$

12. 다음과 같은 수열에서 $(6,\ 4)$는 몇 번째 항인가?

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),$ $(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ \cdots$

① 제40항 ② 제41항 ③ 제42항

④ 제43항 ⑤ 제44항

해설

(합이 2인 순서쌍)$=$ 1개, (합이 3인 순서쌍)$=$ 2개, $\cdots$ 합이 9개인 순서쌍까지의 개수의 합을 모두 더하면, $1+2+\cdots+8=36$이고, 합이 10인 순서쌍 중에서 $(6,\ 4)$는 여섯 번째이므로 42번째이다.

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}(n = 1, 2, 3, \cdots)$를 만족할 때, $S_5 = a_1 + a_2 + \cdots + a_5$의 값은?

① 31　　② 63　　③ 127　　④ 255　　⑤ 511

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{2}{1} = 2$

이므로 1이고, 공비는 2이다.

$\therefore\ S_5 = \dfrac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$

14. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의될 때, $a^{2014}a^{2015}a^{2016}$ 의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 4

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$ 에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 차례로 대입하면

$a_2 = \dfrac{1}{2},\ a_3 = -1,\ a_4 = 2,\ a_5 = \dfrac{1}{2},\ a_6 = -1,\ \cdots$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 $2,\ \dfrac{1}{2},\ -1$ 이 반복되는 수열이고

$a^{2014},\ a^{2015},\ a^{2016}$ 은 연속한 세 항의 곱이므로

$2 \times \dfrac{1}{2} \times (-1) = -1$

15. 세 수 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$를 작은 것부터 차례로 나열한 것은?

① $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$　② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{34}$　③ $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$

④ $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{7}$　⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$

해설

$\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{4}{12}}$, $\sqrt[4]{10} = 10^{\frac{3}{12}}$, $\sqrt[6]{34} = 34^{\frac{2}{12}}$

이므로 세 수를 12제곱하면

$7^4 = 2401,\ 10^3 = 1000,\ 34^2 = 1156$

따라서, 작은 것부터 차례로 나열하면

$\therefore\ \sqrt[4]{10},\ \sqrt[6]{34},\ \sqrt[3]{7}$

16. 방정식 $2x^2-8x-1=0$의 두 근이 $\log_{10} a$, $\log_{10} b$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값은?

① -2 ② -8 ③ -12 ④ -26 ⑤ 34

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\log_{10} a+\log_{10} b=4$,

$\log_{10} a \cdot \log_{10} b=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\dfrac{\log_{10} b}{\log_{10} a}+\dfrac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$

$=\dfrac{(\log_{10} a+\log_{10} b)^2-2\log_{10} a \cdot \log_{10} b}{\log_{10} a \cdot \log_{10} b}$

$=\dfrac{16+1}{-\dfrac{1}{2}}=-34$

17. $\dfrac{[\log 20010]+[\log 2.001]}{[\log 0.02001]}$ 의 값은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$[\log x]$는 x의 지표이므로

$[\log 20010]=4,\ [\log 2.001]=0,\ [\log 0.02001]=-2$

$\therefore\ \dfrac{[\log 20010]+[\log 2.001]}{\log 0.02001}=\dfrac{4+0}{-2}=-2$

18. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{10},\ 10$ $1,\ b_1,\ b_2,\ b_3, \cdots,\ b_{20},\ 10$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}$ 의 값은?

① $\dfrac{10}{21}$　② $\dfrac{10}{20}$　③ $\dfrac{20}{11}$　④ $\dfrac{21}{11}$　⑤ 2

해설

$a'_n = 1 + (n-1) \times d$

$a'_{12} = 1 + 11d = 10$

$d = \dfrac{9}{11}$

$\therefore a'_n = 1 + (n-1) \times \dfrac{9}{11}$

$b'_n = 1 + (n-1) \times d$

$b'_{22} = 1 + 21d = 10$

$d = \dfrac{9}{21}$

$\therefore b'_n = 1 + (n-1) \times \dfrac{9}{21}$

$$\frac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1} = \frac{a'_{11}-a'_2}{b'_{11}-b'_2} = \frac{9 \cdot \dfrac{9}{11}}{9 \cdot \dfrac{9}{21}} = \frac{21}{11}$$

19. 수학자 드 모와브르에 대하여 다음과 같은 일화가 전해지고 있다.

> 드 모와브르는 자신의 수면 시간이 매일 15분씩 길어진다는 것을 깨닫고, 수면 시간이 24시간이 되는 날을 계산하여 그날에 자신이 죽을 것이라고 예측하였다. 그런데, 놀랍게도 그날에 수면하는 상태에서 생을 마쳤다.

드 모와브르가 매일 밤 12시에 잠든다고 가정할 때, 처음 이 사실을 알게 된 날의 수면시간이 14시간이었다면 그날부터 생을 마칠 때까지 깨어있는 시간의 합은?

① 197 ② 205 ③ 214 ④ 224 ⑤ 235

해설

이 사실을 알게 된 날을 첫째 날로 하여 드 모와브르가 깨어 있는 시간을 수열 $\{a_n\}$이라고 하면 a_n은 $a_1 = 10$(시간)이고 공차가 $-\frac{1}{4}$(시간)인 등차수열이다.

24시간 계속 수면하게 되는 날은 깨어 있는 시간이 0시간이므로

$$a_n = 10 - \frac{1}{4}(n-1) = 0$$

$\therefore\ n = 41$

$\therefore$ 깨어있는 시간의 합은 $\dfrac{41(10+0)}{2} = 205$(시간)이다.

20. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 3^n - 1$인 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열이다. 이때, $a + r$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$S_n = 3^n - 1$

$S_{n-1} = 3^{n-1} - 1$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1 \\ &= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2) \end{aligned}$$

$a_1 = S_1 = 2$

$\therefore a = 2,\ r = 3$

$\therefore a + r = 2 + 3 = 5$

21. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

① $\dfrac{9}{4}$ ② $\dfrac{11}{4}$ ③ $\dfrac{13}{4}$ ④ $\dfrac{15}{4}$ ⑤ $\dfrac{17}{4}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_n \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots ,\ n$을 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{1\cdot 3}{2^2}a_1$$

$$a_3 = \frac{2\cdot 4}{3^2}a_2$$

$$a_4 = \frac{3\cdot 5}{4^2}a_3$$

$$\vdots$$

$$\times)\ a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}a_{n-1}$$

$\therefore\ a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n$

$$= \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots a_{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{n+1}{2n}\cdot a_1$$

$a_1 = 5$를 대입하면 $a_n = \dfrac{5(n+1)}{2n}$

$$\therefore a_{10} = \frac{5\cdot 11}{2\cdot 10} = \frac{11}{4}$$

22. 모든 실수 x 에 대하여
$\sqrt[3]{(a-3)x^2-4(a-3)x-10}$ 이 음수가 되도록 하는 정수 a 의 합을 구하면?

① 1　② 3　③ 5　④ 6　⑤ 8

해설

모든 실수 x 에 대하여
$\sqrt[3]{(a-3)x^2-4(a-3)x-10}$ 이 음수가 되려면
$(a-3)x^2-4(a-3)x-10<0\ldots$ ㉠
(i)$a=3$ 일 때,
$-10<0$ 이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.
(ii)$a\neq 3$ 일 때,
모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면 $a-3<0$이고
$(a-3)x^2-4(a-3)x-10=0$의 판별식 D에 대하여
$$\frac{D}{4}=4(a-3)^2+10(a-3)<0$$
$(a-3)(4a-12+10)<0$
$(a-3)(2a-1)<0$
$$\therefore \frac{1}{2}<a<3$$
(i), (ii) 에 의하여 $\frac{1}{2}<a\leq 3$ 이므로
만족하는 정수 a의 값의 합은 $1+2+3=6$

23. 어느 도시의 인구가 매년 일정한 비율로 증가하여 10년 만에 2배가 되었다. 10년 동안 이 도시의 인구는 매년 몇 %씩 증가하였는지 구하여라. (단, $\log 1.07 = 0.03$, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

10년 전 인구를 A명이라 하고,
인구 증가율을 $a\%$라 하면

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{10} = 2A, \quad \therefore \ \left(1+\frac{a}{100}\right)^{10} = 2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10\log\left(1+\frac{a}{100}\right) = \log 2$$

$$\log\left(1+\frac{a}{100}\right) = \frac{1}{10}\log 2 = \frac{1}{10}\times 0.3 = 0.03$$

이때 $\log 1.07 = 0.03$이므로

$$1+\frac{a}{100} = 1.07 \qquad \therefore \ a = 7$$

따라서 10년 동안 이 도시의 인구는 매년 7%씩 증가하였다.

24. 기어가 있는 어떤 자전거는 평지에서 매분 일정한 회전수로 페달을 돌릴 때, 기어를 1단씩 높일 때마다 달리는 속력은 11%씩 증가한다고 한다. 평지에서 매분 일정한 회전수로 페달을 돌릴 때, 11단 기어일 때의 속력은 1단 기어일 때의 속력의 x배라고 한다. x의 값을 아래의 상용로그표를 이용하여 반올림해서 소수점 아래 둘째 자리까지 구하여라.

<상용로그표>

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

▶ 답 :

▷ 정답 : 2.84

해설

기어를 1단씩 올릴 때마다 속력은 11%씩 증가하므로 11단 기어일 때의 속력은 1단 기어일 때의 속력의 1.11^{10}배이다.

$1.11^{10} = x$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x = \log 1.11^{10} = 10 \log 1.11$

$= 10 \times 0.0453$

$= 0.453$

또, $\log 2.83 = 0.4518$, $\log 2.84 = 0.4533$이므로

$\log x \fallingdotseq \log 2.84$

$\therefore\ x \fallingdotseq 2.84$

따라서 11단 기어일 때의 속력은 1단 기어일 때의 속력의 약 2.84배이다.

25. 양수 x에 대하여 $\log x$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 두 등식 $f(a)=f(b)+2$, $g(a)=g(b)+\log 3$을 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 $3a+\dfrac{25}{b}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

$\log x = f(x)+g(x)$이므로

$\log a = f(a)+f(a) \cdots\cdots$ ㉠

$\log b = f(b)+f(b) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서

$$\begin{aligned}\log a-\log b &= f(a)-f(b)+g(a)-g(b)\\ &= 2-\log 3\end{aligned}$$

이므로 $\log \dfrac{a}{b}=\log \dfrac{100}{3}$, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{100}{3}$

$\therefore 3a=100b$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+\frac{25}{b}=100b+\frac{25}{b}\geq 2\sqrt{100b\times\frac{25}{b}}=100$$

(등호는 $a=\dfrac{50}{3}$, $b=\dfrac{1}{2}$일 때 성립한다.)

$\therefore$ 구하는 최솟값은 100이다.