1. 다음 (   ) 안에 알맞은 것은?

$1-2i,\ 2-4i,\ 3-8i,\ 4-16i,\ (\quad),\cdots$

① $5-18i$ ② $5-20i$ ③ $5-24i$

④ $5-32i$ ⑤ $5-64i$

해설

주어진 복소수의 배열을

$a_1+b_1i,\ a_2+b_2i,\ a_3+b_3i,\ a_4+b_4i,\cdots$ 와 같이 생각한다면

(단, $a_k,\ b_k$는 실수)

수열 $\{a_n\}$의 배열은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ (\quad),\ \cdots$ 이고

수열 $\{b_n\}$의 배열은 $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ (\quad),\ \cdots$ 이다.

따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5-32i$이다.

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5+a_6=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $a_6+a_7=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4\pm2\sqrt{3}}=\sqrt{3}\pm1$(복호동순), $a_5+a_7=2a_6$이므로

$(a_5+a_6)+(a_6+a_7)=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)$에서

$4a_6=2\sqrt{3}\quad\therefore\ a_6=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. 두 수 48과 2사이에 10개의 수 a_1, a_2, $\cdots, a_{10}$을 넣어 12개의 수 48, a_1, a_2, $\cdots, a_{10}$, 2가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$의 값은?

① 200 ② 250 ③ 300 ④ 350 ⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은 $\dfrac{12(48+2)}{2} = 300$이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 300 - (48+2) = 300 - 50 = 250$

4. 수열 $-3,\ a,\ b,\ c,\ 13$이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$a-(-3)=d$

$b-a=d$

$c-b=d$

$13-c=d$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

더하면 $13-(-3)=4d\quad \therefore d=4$

$\therefore a=-3+4=1$

$b=1+4=5$

$c=5+4=9$

$\therefore a+b+c=15$

5. 두 수 1과 64사이에 다섯 개의 수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5를 넣어서 만든 수열이 등비수열을 이룰 때, a_3의 값은?(단, $a_3 > 0$)

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

해설

주어진 수열이 등비수열을 이루므로
1, a_3, 64도 등비수열을 이룬다.
$(a_3)^2 = 1 \cdot 64 \quad \therefore\ a_3 = 8$

6. 다음 중 옳은 것은?

① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n}(3k-5)$

② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n}2(k+1)$

③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

④ $4+5+6+\cdots+(n+3)=\sum_{k=1}^{n}(k+3)$

⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$

해설

① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$
② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}2n$
③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$
⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n-2}(k+2)$

7. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 5$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$

$= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$

$= 3 + 2 \times 5 - 10 = 3$

8. $\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 470

해설

$$\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \sum_{k=1}^{10} k^2$$
$$= \sum_{k=1}^{15} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k^2$$
$$= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 470$$

9. 첫째항이 35 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$S_{10} = a_{11}$

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$a_{11} = a + 10d$

$\dfrac{10(2a+9d)}{2} = 10a + 45d$

$10a + 45d = a + 10d$

$9a = -35d$

$a = 35$ 이므로 $d = -9$

$$\begin{aligned} \therefore S_{10} &= \frac{10(2a+9d)}{2} \\ &= \frac{10(70-81)}{2} \\ &= \frac{-110}{2} = -55 \end{aligned}$$

10. $a_1 = 1,\ a_{10} = 37$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10} - a_1 = a_1 + 9d - a_1 = 9d = 36 \quad \therefore d = 4$

이때, $a_{n+1} - a_n = d = 4$이므로

$(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$

$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99})$

$= 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 50 = 200$

11. 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S라 할 때, $\frac{S}{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 132

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로
1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S라 하면

$$(1+2+3+\cdots+10)^2 = (1^2+2^2+\cdots+10^2)+2S$$

$$2S = \left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2 - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 2640$$

$$\therefore S = 1320$$

$$\therefore \frac{S}{10} = 132$$

12. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$에서 n대신에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하면

$a_2 = 2^1 a_1$

$a_3 = 2^2 a_2$

$a_4 = 2^3 a_3$

$\vdots$

$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$

$\therefore\ a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$

$a_{10} = 2^{50}$이므로 $2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$

$a_1 = 2^5 = 32$

13. 세 수 $\sqrt[3]{3^2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$ 중 가장 큰 수를 M, 가장 작은 수를 m이라 할 때, $\dfrac{M}{m}$의 값은?

① $2^{\frac{1}{12}}$ ② $3^{\frac{1}{6}}$ ③ $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

④ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$ ⑤ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

해설

$$\sqrt[3]{3^2\sqrt{2}} = 3^{\frac{2}{3}}2^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{4}{6}}2^{\frac{1}{6}} = (3^4 \times 2)^{\frac{1}{6}} = 162^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{3} = 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{6}}(3^2)^{\frac{1}{6}} = 72^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[3]{2}\sqrt{3} = 2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{6}}(3^3)^{\frac{1}{6}} = 108^{\frac{1}{6}}$$

$$\therefore \frac{M}{m} = \left(\frac{3^4 \times 2}{2^3 \times 3^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

14. $x > 0$이고 $x + x^{-1} = 3$일 때, $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$의 값은?

① $\sqrt{5}$　② $2\sqrt{5}$　③ $3\sqrt{5}$　④ $4\sqrt{5}$　⑤ $5\sqrt{5}$

해설

$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = x + x^{-1} + 2$에서

$\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 3 + 2 = 5$이므로

이 때, $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0$이므로 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

$\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 - 3 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

$= (\sqrt{5})^3 - 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

15. $9^x = 2$일 때, $\left(\frac{1}{27}\right)^{-4x}$의 값은?

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ 16 ④ 64 ⑤ 256

해설

$9^x = 2$이므로 $3^{2x} = 2$이다.

$$(\text{주어진 식}) = (3^{-3})^{-4x} = 3^{12x}$$
$$= (3^{2x})^6 = 2^6 = 64$$

16. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\log_4(a+2b)+\log_4\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ 3

해설

$$\log_4(a+2b)+\log_4\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\log_4(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\log_4\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+4\right)$$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=4$$

따라서, 주어진 식의 최솟값은

$$\log_4(4+4)=\log_4 8=\log_{2^2} 2^3=\frac{3}{2}$$

17. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ 일 때, $\log_3\left(\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{f(k)}\right)$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{f(k)}=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{99}-\sqrt{98})+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=10-1=9$

$\therefore$(준식)$=\log_3 9=2$

18. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫 항부터 제 n항까지의 합이 각각 $S_n = 2n^2 + pn$, $T_n = qn^2 + 5n$이다. 두 수열의 공차의 합이 0이고 두 수열의 제5항이 서로 같을 때, $p+q$의 값은?

① -43　② -33　③ -23　④ -13　⑤ -3

해설

$a_1 = 2 + p$이고

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + pn) - \{2(n-1)^2 + p(n-1)\} \\ &= 4n + p - 2 \end{aligned}$$

$a_n = 4n + p - 2$에 $n = 1$을 대입하면

$a_1 = p + 1$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항부터

등차수열을 이룬다.

$b_1 = q + 5$이고

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= T_n - T_{n-1} \\ &= (qn^2 + 5n) - \{q(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\ &= 2qn + 5 - q \end{aligned}$$

$b_n = 2qn + 5 - q$에 $n = 1$을 대입하면

$b_1 = 5 + q$이므로 $\{b_n\}$은 첫째항부터

등차수열을 이룬다.

$\{a_n\}$의 공차는 4,

$\{b_n\}$의 공차는 $2q$이므로 $q = -2$

$a_5 = p + 18,\ b_5 = 5 + 9q$

$p + 18 = 5 + 9q, \quad \therefore\ p = -31$

$\therefore\ p + q = -31 - 2 = -33$

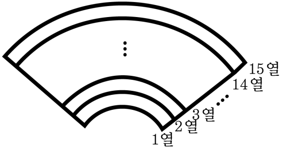
19. 매년 말에 6만원씩 적립할 때, 10년 후의 원리합계는?
(단, 연이율은 6푼, 1년마다의 복리로 계산하고, $1.06^{10} \fallingdotseq 1.791$)

① 791000원 ② 792000원 ③ 793000원
④ 794000원 ⑤ 795000원

해설

$$S_n = \frac{60000\left\{(1.06)^{10} - 1\right\}}{0.06} = \frac{60000 \times 0.791}{0.06}$$
$$= 791000(\text{원})$$

20. 다음 그림과 같이 관람석이 전체 15 열로 이루어진 극장이 있다. 제 n 열의 좌석 수를 a_n 이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+1} = a_n + 1$ 을 만족한다. 제 1 열의 좌석 수가 30 일 때, 이 극장의 총 좌석 수는?



① 1100 ② 555 ③ 430 ④ 330 ⑤ 290

해설

$a_{n+1} - a_n = 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 1 인 등차수열이다.

$\therefore\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot 1$

$= n + 29 (\because\ a_1 = 30)$

따라서, 총 좌석 수는

$\sum_{k=1}^{15}(k+29) = \dfrac{15 \cdot 16}{2} + 29 \cdot 15 = 555$

21. 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $a^2 = b^3 = c^4$이 성립할 때, 세 수 $A = \log_a c$, $B = \log_b a$, $C = \log_c b$의 대소관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　② $A < C < B$　③ $B < A < C$

④ $B < C < A$　⑤ $C < A < B$

해설

$a^2 = c^4$에서 $c = a^{\frac{1}{2}}$

$A = \log_a c = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

$a^2 = b^3$에서 $a = b^{\frac{3}{2}}$

$B = \log_b a = \log_b b^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$

$b^3 = c^4$에서 $b = c^{\frac{4}{3}}$

$C = \log_c b = \log_c c^{\frac{4}{3}} = \dfrac{4}{3}$

$\therefore A < C < B$

22. $1 < x < 10$ 인 실수 x에 대하여 $\log x^3$ 과 $\log \dfrac{1}{x^2}$ 의 소수 부분이 같은 모든 x의 값의 곱을 구하면?

① 10 ② $10^{\frac{8}{5}}$ ③ 10^2 ④ $10^{\frac{5}{2}}$ ⑤ 10^3

해설

$1 < x < 10$ 에서 $0 < \log x < 1$ 이므로 $\log x = \alpha$ 로 놓으면

$\log x^3 = 3\log x = 3\alpha,$

$\log \dfrac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2\log x = -2\alpha$

이때, $\log x^3 - \log \dfrac{1}{x^2} = 5\alpha$ 이므로 5α 는 정수이다.

한편, $0 < \alpha < 1$ 이므로 $0 < 5\alpha < 5$

$\therefore 5\alpha = 1, 2, 3, 4$

즉, $\alpha = \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}$ 이므로

$\log x = \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}$

$\therefore x = 10^{\frac{1}{5}}, 10^{\frac{2}{5}}, 10^{\frac{3}{5}}, 10^{\frac{4}{5}}$

따라서 모든 x의 값들의 곱은

$10^{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}} = 10^2$

23. 한 환경보호단체에서는 호수 A의 오염물질에 대해 다음과 같은 내용의 보고서를 작성하였다.

> 현재 호수 A에는 산업폐기물에 의한 250톤의 오염물질이 있다. 또한 매년 $\frac{50}{3}$톤의 오염물질이 새로 쌓인다. 이 때, 이 오염물질들은 매년 광산화(햇빛에 의한 자연 정화)에 의하여 10% 씩 줄어든다. $\cdots$ (이하 생략)

이 보고서에 의하면 지금부터 10년 후 이 호수에 남아 있는 오염물질의 양은? (단, $0.9^8 = 0.4$로 계산한다.)

① 150톤　② 165톤　③ 177톤
④ 186톤　⑤ 197톤

해설

지금부터 n년 후 호수에 남아 있는 오염물질의 양을 a_n톤이라고 하면 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} a_1 = \left(250 + \frac{50}{3}\right) \times 0.9 = 240 \\ a_{n+1} = \left(a_n + \frac{50}{3}\right) \times 0.9 = 0.9a_n + 15 \end{cases}$$

$a_{n+1} = 0.9a_n + 15$를 변형하면
$a_{n+1} - 150 = 0.9(a_n - 150)$이므로
수열 $\{a_n - 150\}$은 첫째항이 $a_1 - 150 = 240 - 150 = 90$이고 공비가 0.9인 등비수열이다.
즉, $a_n - 150 = 90(0.9)^{n-1}$
$\therefore\ a_n = 90(0.9)^{n-1} + 150$
따라서 지금부터 10년 후 호수에 남아 있는 오염물질의 양은
$a_{10} = 90(0.9)^9 + 150 = 90 \times 0.4 + 150 = 186$(톤)

24. 실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\log_{a^2-a+2}(a^2+1)$ ㉡ $\log_{2|a|+1}(a^2+1)$

㉢ $\log_{a^2+2}(a^2-2a+1)$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 밑의 조건에서

$$a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$$

진수의 조건에서 $a^2+1\geq 1$

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있다.

㉡ (반례) $a=0$일 때, 밑 $2|a|+1=1$ 이므로

로그를 정의할 수 없다.

㉢ (반례) $a=1$일 때, 진수 $a^2-2a+1=0$이므로

로그를 정의할 수 없다.

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있는 것은 ㉠이다.

25. 두 양수 x, y에 대하여 $\log(x+y)$, $\log xy$의 정수 부분이 각각 10, 5일 때, $a < \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} < b$를 만족하는 a의 최댓값을 A, b의 최솟값을 B라 한다. 이때, $\log A + \log B$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 5　　④ 10　　⑤ 50

해설

$\log(x+y)$, $\log xy$의 정수 부분이 각각 10, 5이므로

$10 \le \log(x+y) < 11 \cdots$ ㉠

$5 \le \log xy < 6 \cdots$ ㉡

㉠−㉡을 하면

$10-6 < \log(x+y) - \log xy < 11-5$

$$4 < \log\left(\frac{x+y}{xy}\right) < 6$$

$$4 < \log\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) < 6$$

$$10^4 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 10^6$$

따라서 a의 최댓값은 10^4, b의 최솟값은 10^6이므로

$\log A + \log B = \log 10^4 + \log 10^6 = 4 + 6 = 10$