

1. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_4 : a_9 = 2 : 5$ 일 때, a_{15} 의 값은?

① 40

② 43

③ 46

④ 49

⑤ 52

해설

첫째항을 a 라 하면 $a_n = a + (n - 1) \cdot 3$ 이므로

$$a_4 = a + 9, a_9 = a + 24$$

이때, $(a + 9) : (a + 24) = 2 : 5$ 에서

$$5(a + 9) = 2(a + 24)$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore a_{15} = 1 + (15 - 1) \cdot 3 = 43$$

2. 수열 $a, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, b, \dots$ 가 등차수열을 이룰 때, $a+b$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{5}{6}$

해설

$$\text{공차를 } d \text{ 라 하면 } d = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a+b = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

3. 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10인 등차수열의 합 S_{10} 을 구하면?

① 150

② 170

③ 190

④ 210

⑤ 230

해설

$a = 3, d = 4, n = 10$ 이므로

$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 에 대입하면

$$S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 3 + (10-1) \cdot 4\}}{2} = 210$$

4. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n$ 일 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

5. 제 3 항이 6 이고 제 7 항이 96 인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$a_7 = ar^6 = 96 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \div \textcircled{A} \text{에서 } r^4 = 16$$

$$r = \pm 2, \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

$$\textcircled{A} \text{에 대입하면 } a = \frac{3}{2}$$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2 이므로 곱은 3

6. 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 : a_3 = 4 : 9$ 이고, $a_2 = 4$ 일 때, a_5 의 값은?

- ① $\frac{11}{2}$ ② 7 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{27}{2}$

해설

공비를 r 이라고 하면

$$a_1 : a_3 = a_1 : a_1 r^2 = 1 : r^2 \text{ 이므로}$$

$$1 : r^2 = 4 : 9 \text{ 에서}$$

$$r^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = a_1 r = 4 \text{ 에서 } \frac{3}{2} a_1 = 4 \quad \therefore a_1 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore a_5 = a_1 r^4 = \frac{8}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^4 = \frac{27}{2}$$

7. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k)$ 의 값은?

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = \sum_{k=1}^5 \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^5 2^k \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67\end{aligned}$$

8. $\sum_{k=1}^n a_k = A$, $\sum_{k=1}^n b_k = B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = A + B$

② $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = A - B$

③ $\sum_{k=1}^n ca_k = cA$ (단, c 는 상수)

④ $\sum_{k=2}^{n+1} b_{k-1} = B - 1$

⑤ $\sum_{k=1}^n (a_k + c) = A + cn$ (단, c 는 상수)

해설

$\sum_{k=2}^{n+1} b_{k-1} = \sum_{k=1}^n b_k = B$
따라서, ④가 옳지 않다.

9. 8과 27사이에 두 수 x, y 를 넣었더니 8, $x, y, 27$ 이 이 차례로 등비수열을 이루었다. 이때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

8, $x, y, 27$ 이 등비수열이므로

$$a_1 = 8$$

$$a_4 = a_1 r^3 = 27, \quad 8r^3 = 27$$

$$r^3 = \frac{27}{8}, \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$x = a_1 r = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$$

$$y = a_1 r^2 = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{9}{4} = 18$$

$$\therefore x + y = 12 + 18 = 30$$

10. 세 수 $a, b, 12$ 가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $4, a, b$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?(단, $a > 0, b > 0$)

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 $a, b, 12$ 가 이 순서로 등차수열을 이루므로
 $2b = a + 12 \cdots \textcircled{1}$
세 수 $4, a, b$ 가 이 순서로 등비수열을 이루므로
 $a^2 = 4b \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 에서 $4b = 2a + 24$ 이므로 이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $a^2 = 2a + 24$
 $a^2 - 2a - 24 = 0, (a - 6)(a + 4) = 0$
따라서 $a = 6 (\because a > 0)$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $2b = 6 + 12 \quad \therefore b = 9$
 $a + b = 15$

11. 매출액이 매년 일정한 비율로 증가하는 기업이 있다. 지난 10년간 매출액의 증가율이 69%일 때, 처음 5년간 매출액의 증가율은?

① 13% ② 15% ③ 20% ④ 24% ⑤ 30%

해설

매년 매출액의 증가비율을 a 라 하자

$(1 + a)^{10} = 1.69$ 일 때

$$(1 + a)^5 = \sqrt{1.69} = \sqrt{1.3^2} \\ = 1.3 \text{이므로}$$

1.3배로 증가하였다.

따라서 증가율은 30%

12. $p \times 3^x = 1$, $q \times 3^y = 1$ 일 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y}$ 을 p , q 로 바르게 나타낸 것은?

- ① $2pq$ ② $8pq$ ③ p^2q ④ p^4q^2 ⑤ $\frac{q}{p^2}$

해설

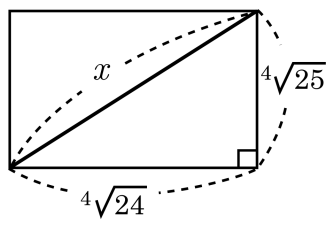
$3^x > 0$, $3^y > 0$ 이므로 $p > 0$, $q > 0$ 이다.

$$3^x = \frac{1}{p}, \quad 3^y = \frac{1}{q}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y} = (3^{-2})^{2x+y} = 3^{-4x-2y}$$

$$= (3^x)^{-4} (3^y)^{-2} = \left(\frac{1}{p}\right)^{-4} \left(\frac{1}{q}\right)^{-2} = p^4 q^2$$

13. 가로와 세로의 길이가 각각 $\sqrt[4]{24}$, $\sqrt[4]{25}$ 인 직사각형의 대각선의 길이는?



- ① $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ ② $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ ③ 3
 ④ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(\sqrt[4]{24})^2 + (\sqrt[4]{25})^2} \\ &= \sqrt{\sqrt{24} + \sqrt{25}} \\ &= \sqrt{2\sqrt{6} + 5} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} \\ \therefore x &= \sqrt{3} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

14. $a = \log_4(3 - \sqrt{8})$ 일 때, $2^a + 2^{-a}$ 의 값은?

① $2\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2} + 1$

③ $2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{3} + 1$

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

로그의 정의에 의하여

$$4^a = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2a} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2^a = \sqrt{2} - 1$$

$$2^{-a} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-a} = \sqrt{2} + 1$$

$$2^a + 2^{-a} = 2\sqrt{2}$$

15. $\log_{10}(1+1) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{99}\right)$
의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \log_{10} 2 + \log_{10} \frac{3}{2} + \log_{10} \frac{4}{3} + \cdots + \log_{10} \frac{100}{99} \\&= \log_{10} \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99} \right) \\&= \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2\end{aligned}$$

16. $\log_a 27 = -2, \log_{\sqrt{3}} b = 3$ 일때, ab 의 값은?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$\log_a 27 = -2 \text{에서 } a^{-2} = 27 = 3^3$$

$$\therefore a = 3^{-\frac{3}{2}} (\because a > 0)$$

$$\log_{\sqrt{3}} b = 3 \text{에서 } b = (\sqrt{3})^3 = (3^{\frac{1}{2}})^3 = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore ab = 3^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = 3^0 = 1$$

17. 서로 다른 세 양수 a, b, c 에 대하여 $\log_a b = \sin x, \log_a c = \cos x$ 일 때, $b^{\sin x} \cdot c^{\cos x}$ 의 값은?

① a ② b ③ c ④ ab ⑤ ac

해설

$$\begin{aligned}\log_a b = \sin x \text{에서 } b &= a^{\sin x} \\ \log_a c = \cos x \text{에서 } c &= a^{\cos x} \\ \therefore b^{\sin x} \cdot c^{\cos x} &= (a^{\sin x})^{\sin x} \cdot (a^{\cos x})^{\cos x} \\ &= a^{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= a^1 = a\end{aligned}$$

18. 수열 $\{a_n\}$ 을 $\log_3 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = n(n-1) (n=1, 2, 3, \dots)$ 로 정의할 때, $\frac{a_{21}}{a_{20}}$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$\log_3 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = n(n-1)$ 에서

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 3^{n(n-1)} \dots \textcircled{1}$$

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} = 3^{(n-1)(n-2)} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } a_n = 3^{2(n-1)}$$

$$\therefore \frac{a_{21}}{a_{20}} = \frac{3^{40}}{3^{38}} = 3^2 = 9$$

19. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1, a_2 = 3$ 이고,
 $2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 를 만족할 때, $a_5 + \sum_{k=1}^5 a_k$ 의 값은?

① 196 ② 198 ③ 200 ④ 202 ⑤ 204

해설

$$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2} \text{에서}$$

$$\log a_{n+1}^2 = \log a_n a_{n+2}$$

$$\therefore a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, 첫째항은 1, 공비는 $\frac{3}{1} = 3$

이므로

$$\therefore a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

$$a_5 + \sum_{k=1}^5 a_k = 3^4 + \frac{1 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$= 81 + 121 = 202$$

20. $a_2 = 3a_1$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_8 = 243$ 일 때, a_{15} 의 값은?

- ① 3^8 ② 3^9 ③ 3^{10} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

해설

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ 에서
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $a_2 - a_1 = 3a_1 - a_1 = 2a_1$ 이고 공비가 3인 등비수열이므로
 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2a_1 \cdot 3^{k-1}$
 $= a_1 + 2a_1 \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$
 $= a_1 + 2a_1 \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}$
 $a_8 = a_1 \cdot 3^7 = 243 = 3^5$ 에서 $a_1 = 3^{-2}$
 $\therefore a_{15} = 3^{-2} \cdot 3^{14} = 3^{12}$

21. $A = \sqrt[3]{9}$, $B = \sqrt{27}$, $C = \sqrt[4]{81}$ 일 때, A, B, C 의 대소관계를 바르게 나타낸것은?

- ① $A < C < B$ ② $C < A < B$ ③ $B < A < C$
④ $B < C < A$ ⑤ $A < B < C$

해설

$$\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{27} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[4]{81} = 3^{\frac{4}{4}} = 3$$

$$\therefore A < C < B$$

22. $4^{10} \cdot 5^{17}$ 은 몇 자리 정수인가?

① 17

② 18

③ 10

④ 20

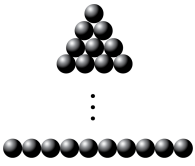
⑤ 21

해설

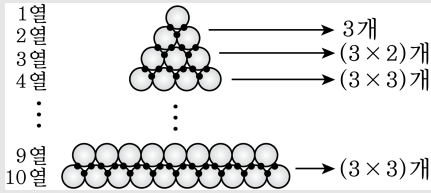
$$\begin{aligned} & \log 4^{10} \cdot 5^{17} \\ &= 20 \log^2 + 17 \log^5 \\ &= 20 \log^2 + 17 - 17 \log^2 \\ &= 17 + 3 \log^2 \\ &= 17 + 3 \times 0.3010 \\ &= 17.9030 \\ & \text{지표가 17 이므로 18 자리수} \end{aligned}$$

23. 오른쪽 그림과 같이 바둑알이 10줄로 붙어 나열되어 있다. 이때, 바둑알끼리 맞닿은 점의 개수는?

- ① 110
- ② 120
- ③ 135
- ④ 140
- ⑤ 150



해설



따라서 바둑알끼리 맞닿은 점의 총 개수는

$$3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3 \cdot 9$$

$$= 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 3 \sum_{k=1}^9 k = 3 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 135(\text{개})$$

24. 어느 실험실에서 배양하는 세균은 1시간이 지날 때부터 4마리가 죽고 남아 있는 세균의 수가 두 배가 된다고 한다. 처음 10마리이던 세균의 수가 1000마리 보다 많아지면서 최소 몇 시간이 지나야 하는가?

- ① 6시간
- ② 7시간
- ③ 8시간
- ④ 9시간
- ⑤ 10시간

해설

n 시간 후 남아 있는 세균의 수를 a_n 이라하면
 $a_{n+1} = 2(a_n - 4)$
 $a_{n+1} = 2a_n - 8$
 $(a_{n+1} - \alpha) = 2(a_n - \alpha)$
 $\alpha = 8$
 $\therefore a_{n+1} - 8 = 2(a_n - 8)$
 a_1 은 1시간 후 남아 있는 세균의 수
이므로 $a_1 = 2 \cdot (10 - 4) = 12$
 $\therefore a_n - 8 = 12 \cdot 2^{n-1}$
 $\therefore 12 \cdot 2^{k-1} + 8 > 1000$ 인 k 의 최솟값을 구하면 된다.
 $3 \cdot 2^{k+1} + 8 > 1000$
그런데 $2^8 = 256, 2^9 = 512$ 이므로
 $3 \cdot 2^8 + 8 = 776$
 $3 \cdot 2^9 + 8 = 1544$
 $\therefore k = 8$
즉, 8시간 후이다.

25. 함수 $f(x) = x + \log_{10} x$ 에 대하여
 $\sum_{n=1}^{99} [f(n)] - \sum_{n=2}^{100} [f(n)]$ 의 값은?

① -106 ② -107 ③ -108 ④ -109 ⑤ -110

해설

$f(x) = x + \log_{10} x$ 이므로
 $\sum_{n=1}^{99} [f(n)] - \sum_{n=2}^{100} [f(n)] = [f(1)] + [f(2)] + \cdots + [f(99)] -$
 $\{[f(2)] + [f(3)] + \cdots + [f(100)]\}$
 $= [1 + \log_{10} 1] - [100 + \log_{10} 100] = -110 + 1 = -109$