

1. 다음 등비수열에서 ()안에 알맞은 수는?

$$32, -8, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, (\quad)$$

- ① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{1}{18}$ ③ $-\frac{1}{24}$ ④ $-\frac{1}{32}$ ⑤ $-\frac{1}{64}$

해설

공비가 $-\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{32}$$

2. $\sqrt[5]{3^4} \times 9^{\frac{1}{10}} \times 3^{-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{9}$

② $\frac{1}{3}$

③ 1

④ 3

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{3^4} \times 9^{\frac{1}{10}} \times 3^{-1} &= 3^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{2}{10}} \times 3^{-1} \\ &= 3^{\frac{4}{5} + \frac{1}{5} - 1} = 3^0 = 1\end{aligned}$$

3. $\log_9 x = -\frac{3}{2}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{27}$

해설

$$\log_9 x = -\frac{3}{2}$$

$$\iff x = 9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

4. $\log_2 5\sqrt{3} + \log_2 \frac{24}{5} - \log_2 3\sqrt{3}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 5

④ $\log_2 5$

⑤ $\log_2 6$

해설

$$\begin{aligned}\log_2 5\sqrt{3} + \log_2 \frac{24}{5} - \log_2 3\sqrt{3} &= \log_2 \frac{5\sqrt{3} \times \frac{24}{5}}{3\sqrt{3}} \\ &= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\end{aligned}$$

5. $\log_4 2 + \log_8 4 - \log_{16} 8$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{12}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$$\begin{aligned} & \log_{2^2} 2 + \log_{2^3} 2^2 - \log_{2^4} 2^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6+8-9}{12} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

6. 다음 ()안에 알맞은 수는?

$$\frac{\sqrt{3}}{1}, \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{7}}{9}, (\quad), \frac{\sqrt{11}}{25}$$

- ① $\frac{\sqrt{7}}{12}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{12}$
- ③ $\frac{3}{16}$
- ④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$
- ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며, 분자는 $\sqrt{+2}$ 의 규칙으로 나타난다.
따라서 ()안에 들어갈 수의 분자는 $\sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$ 이다.
분모는 +1이 된 수의 제곱의 규칙으로 나타난다.
따라서 ()안에 들어갈 수의 분모는 $(3+1)^2 = 16$ 이므로 ()
안에 들어갈 수는 $\frac{3}{16}$

7. 수열 $\log 3, \log 9, \log 27, \dots$ 의 제 101 항은?

① $10 \log 3$

② $99 \log 3$

③ $100 \log 3$

④ $101 \log 3$

⑤ $102 \log 3$

해설

$$a_1 = \log 3$$

$$a_2 = \log 9 = 2 \log 3$$

$$a_3 = \log 27 = 3 \log 3$$

$\vdots$

$$a_n = n \log 3$$

$$\therefore a_{101} = 101 \log 3$$

8. 등차수열 $11, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}, 213$ 에서 공차는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$b_1 = 2, b_2 = a_1, b_3 = a_2, \dots, b_{101} = a_{100},$$

$$b_{102} = 213$$

$$b_{102} = 213 = 11 + (102 - 1) \cdot d$$

$$101d = 202$$

$$d = 2$$

9. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로 $a_{10} = S_{10} - S_9 = (10^2 + 20) - (9^2 + 18) = 21$

10. 제 3 항이 -12 이고 제 6 항이 -96 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$

② $(-3) \cdot 2^{n-1}$

③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$

⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$$a_3 = ar^2 = -12$$

$$a_6 = ar^5 = -96$$

$$r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2$$

$$ar^2 = 4a = -12 \quad \therefore a = -3$$

$$\therefore a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$$

11. 2와 18의 등비중항을 x , 2와 18의 등차중항을 y 라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은?

① 122 ② 128 ③ 136 ④ 146 ⑤ 152

해설

x 는 2와 18의 등비중항이므로

$$x^2 = 2 \times 18 = 36$$

y 는 2와 18의 등차중항이므로

$$2y = 2 + 18 = 20$$

$$\therefore y = 10$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 36 + 100 = 136$$

12. 다음 식의 값은?

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)-\sum_{k=4}^{10}(k^2+k)$$

- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

$$(\text{준 식})=\sum_{k=1}^3(k^2+k)=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)=20$$

13. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

- ① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \sum_{j=1}^{10} j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) = 385 \end{aligned}$$

14. $\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$ 의 값은?

- ① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k} \\ &= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10} \\ &= \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{11}{9} \cdot \frac{12}{10} \right) \\ &= \log \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66 \end{aligned}$$

15. $a_5 = 27$, $a_{11} = 15$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}

② a_{17}

③ a_{18}

④ a_{19}

⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 27$$

$$a_{11} = a + 10d = 15$$

연립하여 풀면 $d = -2$, $a = 35$

$$\therefore a_n = 35 + (n - 1) \times (-2) = -2n + 37$$

$-2n + 37 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$$37 < 2n, \quad 18.5 < n$$

$$\therefore n = 19$$

$\therefore \{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은 a_{19} 이다.

16. 첫째항부터 제10항까지의 합은 85, 제 11항부터 제20항까지의 합은 385인 등차수열이 있다. 이때, 이 수열 $\{a_n\}$ 의 제 21항부터 제30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 685

해설

주어진 수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하고 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{10} = 85, S_{20} = S_{10} + 385 = 85 + 385 = 470$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 85 \cdots \textcircled{A}$$

$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 470 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a = -5$, $d = 3$

$$\therefore S_{30} = \frac{30 \{ 2 \cdot (-5) + 29 \cdot 3 \}}{2} = 1155$$

따라서 구하는 합은 $1155 - 470 = 685$

17. $a_1 = 23$, $a_2 = 20$ 이고, $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_k = -115$ 일 때, 자연수 k 의 값은?

① 43 ② 44 ③ 45 ④ 46 ⑤ 47

해설

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고
첫째항이 23, 공차가 $a_2 - a_1 = 20 - 23 = -3$ 이므로
 $a_n = 23 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 26$
 $-3k + 26 = -115$ 에서 $-3 = -141$
 $\therefore k = 47$

18. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_n + a_{n+1} = 3n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의된다. 이때, 두 수 $P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{19}$, $Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots + a_{20}$ 에 대하여 $P - Q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = 2, a_1 + a_2 = 3 \therefore a_2 = 1$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } a_2 + a_3 = 6 \therefore a_3 = 5$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } a_3 + a_4 = 9 \therefore a_4 = 4$$

$$\therefore a_{2n-1} - a_{2n} = 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore P - Q = \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} - a_{2k}) = 10$$

19. 다음은 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\textcircled{m})^3$ 을 더하면
$$\sum_{k=1}^m k^3 + (\textcircled{m})^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\textcircled{m})^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\textcircled{m})^3$$

$$= \frac{(m+1)^2 (\textcircled{\textcircled{m}})^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(\textcircled{\textcircled{m}})}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 $\textcircled{m}$ 에 들어갈 식을 $f(m)$, $\textcircled{\textcircled{m}}$ 에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5) + g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.
(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\textcircled{m})^3$ 을 더하면
$$\sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (m+1)^3$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(m+2)}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$
 이 성립한다.
 $\therefore f(m) = m + 1, g(m) = m + 2$
 $\therefore f(5) = 5 + 1 = 6, g(6) = 6 + 2 = 8$
 $\therefore f(5) + g(6) = 6 + 8 = 14$

20. 세 자연수 a, b, c 의 최대공약수가 3이고, 등식 $2^a \cdot 5^b = 400^c$ 을 만족할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$400 = 2^4 \cdot 5^2$ 이므로

$$2^a \cdot 5^b = 400^c = (2^4 \cdot 5^2)^c = 2^{4c} \cdot 5^{2c}$$

따라서, $a = 4c, b = 2c$

a, b, c 의 최대공약수가 3이므로

$$c = 3, a = 12, b = 6$$

$$\therefore a + b + c = 12 + 6 + 3 = 21$$

21. $\sum_{k=1}^n = n^2 + 1$ 일 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

⑦ $a_5 = 9$

$$\textcircled{\text{L}} \quad \sum_{k=1}^n a_{2k} = 2n^2 + n$$

$$\textcircled{C} \quad \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 2n^2 - n + 1$$

① ⑦

② ②

③ ⑦, ①

④ ①, ②

(5), (7), (L), (E)

해설

⑦ $\sum_{k=1}^n a_k = S_n$ 이라 하면

$$a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 + 1) - (4^2 + 1) = 9(\text{참})$$

$$\textcircled{L} S_n = n^2 + 1 \textcircled{L} \text{므로}$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - \{(n-1)^2 + 1\} \\ &= 2n - 1 \quad (n \geq 2) \\ \therefore a_n &= 2(2n) - 1 = 4n - 1 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (4n-1) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} n - \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_{2k} = \sum_{k=1}^n (4k-1) = 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2n^2 + n \quad (\text{참})$$

$$\oplus a_n = 2n - 1 (n \geq 2) \oplus 1, a_1 = S_1 = 2 \oplus 1, \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 2 + \sum_{k=1}^n \{2(2k-1) - 1\} = 2 + \sum_{k=1}^n (4k-3)$$

$$2 + \sum_{k=2}^n \{2(2k-1) - 1\} = 2 + \sum_{k=2}^n (4k-3) \\ = 2 + \sum_{k=2}^n (4k-3) - 1 = 2 + 4 \sum_{k=2}^n k - \sum_{k=2}^n 3 = 1$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^n (4k - 5) - 1 = 2 + 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 5 - 1$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n = 2n^2 - n + 1 \text{ (참)}$$

따라서, 보기 중에서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

22. $4^x = 3 + 2\sqrt{2}$ 일 때, $16^x + 16^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$4^x = 3 + 2\sqrt{2}$ 이므로

$$4^{-x} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$4^x + 4^{-x} = 6$, $4^x \cdot 4^{-4x} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} 16^x + 16^{-x} &= (4^x)^2 + (4^{-x})^2 \\ &= (4^x + 4^{-x})^2 - 2 \cdot 4^x \cdot 4^{-x} \\ &= 6^2 - 2 \cdot 1 = 34 \end{aligned}$$

23. $a = \sqrt[3]{8+4\sqrt{2}}$, $b = \sqrt[3]{8-4\sqrt{2}}$ 이고 $\log_3(a^3+b^3)$ 의 소수부분을 α 라 할 때, 3^α 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

해설

$$a^3 + b^3 = (8 + 4\sqrt{2}) + (8 - 4\sqrt{2}) = 16$$

$$\log_3(a^3 + b^3) = \log_3 16$$

그런데, $\log_3 16$ 의 정수부분이 2이므로

$$\alpha = \log_3 16 - 2 = \log_3 \frac{16}{9}$$

$$\therefore 3^\alpha = \frac{16}{9}$$

24. 서로 다른 세 실수 a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a, b, c 는 1이 아닌 양수이다.)

보기

- ㉠ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 는 이 순서로 등비수열을 이룬다.
 ㉡ $\log a, \log b, \log c$ 는 이 순서로 등차수열을 이룬다.
 ㉢ $\log_a 2, \log_b 2, \log_c 2$ 는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

- ① ㊦ ② ㊤ ③ ㊦, ㊤
- ④ ㊤, ㊥ ⑤ ㊦, ㊤, ㊥

해설

a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이루므로 $b^2 = ac$

- ㉠ (참) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{ac} = \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{b}\right)^2$
- 따라서, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 은 이 순서로 등비수열을 이룬다.
- ㉡ (참) $\log a + \log c = \log ac = \log b^2 = 2 \log b$
- 따라서, $\log a, \log b, \log c$ 는 이 순서로 등차수열을 이룬다.
- ㉢ (거짓) [반례] $a = 2, b = 4, c = 8$ 이면
- $$\log_2 2 = 1, \log_4 2 = \frac{1}{2}, \log_8 2 = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$
- $$b^2 = ac \text{ 이지만 } 2 \log_b 2 \neq \log_a 2 + \log_c 2 \text{ 이다.}$$

25. 어떤 물질의 양이 반으로 줄어드는 데 걸리는 시간을 반감기라고 한다. 현재의 질량을 a , 반감기를 h 년이라 할 때, t 년 후에 남아 있는 물질의 양 m 은 $m = a \cdot 2^{-\frac{t}{h}}$ 인 관계가 성립한다. 반감기 h 년인 어떤 물질 ag 이 mg 으로 변하려면 몇 년이 지나야 하는가?

- ① $\frac{h}{\log 2} \cdot \log \frac{m}{a}$
 ② $\frac{h}{\log 2} \cdot \log \frac{a}{m}$
- ③ $\frac{h}{\log 2} \cdot \log \frac{\log a}{\log m}$
 ④ $\frac{\log 2}{h} \cdot \log \frac{m}{a}$
- ⑤ $\frac{\log 2}{h} \cdot \log \frac{a}{m}$

해설

t 를 a, h, m 에 관한 식으로 표현한다.

$$m = a \cdot 2^{-\frac{t}{h}}$$

$$\frac{m}{a} = 2^{-\frac{t}{h}}$$

$$\log_2 \frac{m}{a} = -\frac{t}{h}$$

$$t = -h \cdot \log_2 \frac{m}{a}$$

$$= -h \cdot \frac{\log \frac{m}{a}}{\log 2}$$

$$= \frac{h}{\log 2} \cdot \log \left(\frac{m}{a}\right)^{-1}$$

$$= \frac{h}{\log 2} \cdot \log \frac{a}{m}$$