

1. $\left\{\frac{n^2-1}{n(n+1)}\right\}$ 의 제 100항은?

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{9}{10}$ ③ $\frac{99}{100}$ ④ $\frac{99}{101}$ ⑤ $\frac{101}{100}$

해설

$$\left\{\frac{n^2-1}{n(n+1)}\right\} = \frac{n-1}{n}$$

$$\therefore \text{제 100항은 } \frac{99}{100}$$

2. 등차수열 a_n 의 일반항이 $a_n = 3n + 2$ 일 때, 첫째 항 a 와 공차 d 는?

① $a = -5, d = -3$

② $a = -5, d = 3$

③ $a = 5, d = -3$

④ $a = 5, d = 3$

⑤ $a = 5, d = 8$

해설

$a_n = 3n + 2$ 이므로
 $a_1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$,
 $a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$ 이므로
 $d = a_2 - a_1 = 3$

3. 첫째항이 $\frac{7}{4}$, 공차가 $\frac{3}{4}$ 인 등차수열의 첫째항부터 제 17항까지의 합은?

- ① $\frac{167}{4}$ ② $\frac{235}{4}$ ③ $\frac{527}{4}$ ④ $\frac{1105}{4}$ ⑤ $\frac{1054}{4}$

해설

$$\text{구하는 합을 } S_{17} = \frac{17 \left\{ 2 \cdot \frac{7}{4} + (17-1) \cdot \frac{3}{4} \right\}}{2} = \frac{527}{4}$$

4. 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a_n = 3^n$

해설

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

5. $\log_2(x-4)^2$ 의 값이 존재하기 위한 x 의 범위는?

- ① $x < 1$ ② $x > 3$ ③ $x < 4$ ④ $x \neq 4$ ⑤ $x \neq 5$

해설

$(x-4)^2 > 0$ 로부터 $x \neq 4$

6. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{20} 의 값은?

- ① 38 ② 39 ③ 41 ④ 42 ⑤ 43

해설

$$\begin{aligned} a_{20} &= S_{20} - S_{19} \\ S_{20} &= 20^2 + 40 - 1 = 439, \\ S_{19} &= 19^2 + 38 - 1 = 398 \\ \therefore a_{20} &= 439 - 398 = 41 \end{aligned}$$

7. 양수 x, y 에 대하여 $\sqrt{2}+1, x, \sqrt{2}-1, y$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $x+y$ 의 값은?

- ① $-2\sqrt{2}$ ② $1-2\sqrt{2}$ ③ $4-2\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{2}$

해설

x 는 $\sqrt{2}+1$ 과 $\sqrt{2}-1$ 의 등비중항이므로
 $x^2 = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$ 이므로
 $\therefore x=1$ ($\because x>0$)
따라서 이 수열의 공비는 $\sqrt{2}-1$ 이므로
 $y = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$
 $\therefore x+y = 4-\sqrt{2}$

8. $\sum_{k=3}^{10} k(k+2)$ 의 값은?

- ① 460 ② 468 ③ 478 ④ 480 ⑤ 484

해설

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} k(k+2) &= \sum_{k=1}^{10} k(k+2) - \sum_{k=1}^2 k(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k) - \sum_{k=1}^2 (k^2 + 2k) \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} k - (3 + 8) \\ &= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 11 \\ &= 385 + 110 - 11 \\ &= 484 \end{aligned}$$

9. $\sum_{k=1}^n a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^n b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^n (2a_k - 3b_k + 5) \}$ 의 값은?

- ① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{10} \{ 2 \sum_{k=1}^n a_k - 3 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n 5 \} \\ &= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 550 \end{aligned}$$

10. 다음 수열의 합을 Σ 기호를 써서 나타내면?

$$3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1}$$

- ① $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$ ② $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$ ③ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k$
④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k$ ⑤ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3 \cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로
 $3 + 6 + 9 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

11. $x \geq 0$ 일 때, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ 를 간단히 하면?

- ① $x\sqrt{x}$ ② $x\sqrt[4]{x}$ ③ $\sqrt[8]{x}$ ④ $\sqrt[8]{x^3}$ ⑤ $\sqrt[8]{x^7}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}} \\ &= (x^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}} \end{aligned}$$

12. $a = 4^3$ 일 때, 8^9 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

- ① a^2 ② $a^{\frac{5}{2}}$ ③ a^3 ④ $a^{\frac{7}{2}}$ ⑤ $a^{\frac{9}{2}}$

해설

$$\begin{aligned} a &= 4^3 = (2^2)^3 = 2^6 & \therefore 2 &= a^{\frac{1}{6}} \\ 8^9 &= (2^3)^9 = 2^{27} = (a^{\frac{1}{6}})^{27} = a^{\frac{27}{6}} = a^{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

13. $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 1$, $a_{n+9} - a_{n+2} = 35$ 가 성립할 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 496

해설

$2a_{n+2} = a_n + a_{n+2}$ 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로
공차를 d 라 하면

$$a_{n+9} = a_{n+2} + 7d \text{에서 } 7d = 35$$

$$\therefore d = 5$$

$$\therefore a_{100} = 1 + 99 \cdot 5 = 496$$

14. $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여
면끼리 더하면

$$\begin{array}{r} a_1 = a_1 + 1^2 \\ a_2 = a_2 + 2^2 \\ a_3 = a_3 + 3^2 \\ \vdots \\ +) a_{10} = a_9 + 9^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2) \\ &= 5 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} \\ &= 290 \end{aligned}$$

15. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

$$\begin{aligned} & \cdot a_1 = 1, a_2 = 2 \\ & \cdot 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0 (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$$a_{n+1} - a_n = b_n \text{ 이라 하면 } b_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$$

$$b_1 = a_2 - a_1 \text{ 이므로 } b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_{50} = 3 - 2^{-48}$$

$$\therefore p = 3, q = -48 \text{ 이므로 } p + q = -45$$

16. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$)

보기

㉠ $\log_a(b+c) = \log_a b \cdot \log_a c$

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

㉢ $\log_a b^c = (\log_a b)^c$

㉣ $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$

① ㉠, ㉣

② ㉡, ㉣

③ ㉡, ㉣

④ ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $\log_a(b+c) \neq \log_a b \cdot \log_a c$ (거짓)

㉡ $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ (참)

㉢ $\log_a b^c = c \log_a b \neq (\log_a b)^c$ (거짓)

㉣ $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$ (참)

따라서 옳은 것은 ㉡, ㉣이다.

17. $\log 5.36 = 0.7292$, $\log 1.959 = 0.2920$ 일 때, 0.536^{10} 는?

- ① 0.1959 ② 0.01959 ③ 0.001959
④ 0.00292 ⑤ 0.005364

해설

$$\begin{aligned} & \log 0.536^{10} \\ &= 10 \log 0.536 = 10 \log \frac{5.36}{10} \\ &= 10(\log 5.36 - 1) = 10(0.7292 - 1) \\ &= -2.708 = -3 + (1 - 0.708) \\ &= -3 + 0.292 = -3 + \log 1.959 \\ &= \log \frac{1}{1000} + \log 1.959 \\ &= \log 0.001959 \end{aligned}$$

18. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 7)$ 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $6x$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 7)$ 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log(2^x + 1) = \log 3 + \log(2^x + 7)$$

$$\log(2^x + 1)^2 = \log 3(2^x + 7) \Leftrightarrow (2^x + 1)^2 = 3(2^x + 7)$$

$$2^x = t \text{로 치환 } (t + 1)^2 = 3(t + 7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$$

$$(t + 4)(t - 5) = 0 \Leftrightarrow t = 5 (\because t > 0)$$

$$\therefore 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{1 - 0.3}{0.3} = \frac{7}{3}$$

따라서 구하는 값은 $6x = 14$

19. 한 은행은 고객으로부터 100만원을 연이율 5%의 5년 만기 정기예금으로 받으면 그 중에서 90만원을 연이율 $r\%$ 로 5년 동안 대출하고 나머지 10만원은 예비비로 보관한다. 5년 후 은행은 대출금을 이자와 함께 회수하고 고객에게 정기예금을 이자와 함께 지불하여 20만원의 수익을 얻으려고 한다. 이때, 대출 이율 r 을 구하는 식은? (단, 모든 이자는 1년마다의 복리로 계산한다.)

- ① $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 10^5$
 ② $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 2 \times 10^5$
 ③ $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 - 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 3 \times 10^5$
 ④ $9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 - 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 = 10^5$
 ⑤ $9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 - 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 2 \times 10^5$

해설

연이율 5%의 5년 만기 정기예금 100만원에 대한 5년 후의 원리함계는 $10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5$

대출 이율이 $r\%$ 인 대출금 90만원에 대한 5년 후의 원리함계는 $9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5$

이 은행은 100만원의 정기예금에서 90만원을 대출하고 10만원의 예비비를 보관하고 있으므로 5년 후 20만원의 수익을 얻으려면 정기예금의 원리함계와 대출금의 원리함계의 차가 10만원이면 된다.

$$\therefore 9 \times 10^5 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 - 10^6 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 = 10^5$$

20. 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n = 3^n - 10 \left[\frac{3^n}{10} \right]$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의할 때,
 $\sum_{k=1}^{50} a_n$ 의 값을 구하여라.
 (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 252

해설

$$a_1 = 3 - 10 \left[\frac{3}{10} \right] = 3 - 10 \times 0 = 3,$$

$$a_2 = 9 - 10 \left[\frac{9}{10} \right] = 9 - 10 \times 0 = 9,$$

$$a_3 = 27 - 10 \left[\frac{27}{10} \right] = 27 - 10 \times 2 = 7,$$

$$a_4 = 81 - 10 \left[\frac{81}{10} \right] = 81 - 10 \times 8 = 1,$$

$$a_5 = 243 - 10 \left[\frac{243}{10} \right] = 243 - 10 \times 24 = 3, \dots$$

즉, a_n 은 3^n 의 일의 자리 수이고, 3, 9, 7, 1이 차례대로 반복된다.

$$\sum_{k=1}^{50} a_n = 12(3 + 9 + 7 + 1) + 3 + 9 = 252$$

21. 컴퓨터는 내부에서 정보를 표현하기 위하여 비트(bit)라는 최소 단위를 사용한다. 비트는 2진수인 1과 0의 두 가지 상태로 나타낼 수 있다. 비트는 2진수 체계이므로 n 비트는 0, 1을 중복하여 n 개 나열하는 경우의 수만큼 데이터를 나타낼 수 있다. 어떤 컴퓨터의 모니터는 색을 나타내는 점인 화소가 가로 1024개 세로가 768개인 직사각형으로 이루어져 있고 각 화소가 나타낼 수 있는 색의 데이터의 개수는 32비트라고 할 때, 이 모니터의 한 화면으로 나타낼 수 있는 데이터의 개수는 $a \times 2^b$ 이다. 이때, 두 수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라. (단, a 는 홀수이고 b 는 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 150

해설

n 자리(개)의 이진법으로 나타낸 서로 다른 수의 개수는 2^n 이므로

n 비트로 나타낼 수 있는 데이터의 개수는 2^n 개다.

화소 하나의 데이터가 32비트이므로 나타낼 수 있는 데이터의 개수는 2^{32}

전체 화소의 개수는 $1024 \times 768 = 3 \times 2^{18}$

따라서 전체 데이터의 개수는 $2^{32} \times 3 \times 2^{18} = 3 \times 2^{50}$

$\therefore a \times b = 3 \times 50 = 150$

22. 어떤 산업에서 노동의 투입량을 x , 자본의 투입량을 y 라 할 때, 그 산업의 생산량 z 는 $z = 2x^\alpha y^{1-\alpha}$ (α 는 $0 < \alpha < 1$ 인 상수) 자료에 의하면 2027년도의 노동 및 자본의 투입량은 2014년도 보다 각각 4배와 2배이고, 2027년도 산업 생산량은 2014년도 산업 생산량의 2.5배이다. 이 사실로부터 상수 α 의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하면? (단, $\log_{10} 2 = 0.30$)

- ① 0.50 ② 0.33 ③ 0.25 ④ 0.20 ⑤ 0.10

해설

	노동	자본	생산
2014년	x	y	z
2027년	$4x$	$2y$	$2.5z$

$$\begin{aligned}
 z &= 2x^\alpha y^{1-\alpha} \\
 2.5z &= 2 \cdot (4x)^\alpha (2y)^{1-\alpha} \\
 2.5 \cdot 2x^\alpha \cdot y^{1-\alpha} &= 2 \cdot 4^\alpha \cdot x^\alpha \cdot 2^{1-\alpha} \cdot y^{1-\alpha} \\
 5 &= 2 \cdot 2^{2\alpha} \cdot 2^{1-\alpha} \\
 5 &= 2^{\alpha+2} \\
 \alpha + 2 &= \log_2 5 \\
 \alpha + 2 &= \frac{\log 5}{\log 2} \\
 \alpha &= \frac{1 - \log 2}{\log 2} - 2 \\
 &= \frac{0.7}{0.3} - 2 = \frac{1}{3} \\
 \therefore \alpha &= 0.33
 \end{aligned}$$

23. 5년에 한 번씩 시행하는 인구주택총조사 결과 A 시의 인구는 5년마다 7% 증가한다고 한다. 2015년의 A 시의 인구가 100만 명이었을 때, 2050년의 이 시의 인구는? (단, $\log 1.07 = 0.03$, $\log 1.62 = 0.21$ 로 계산한다.)

- ① 121만명 ② 145만명 ③ 162만명
④ 178만명 ⑤ 185만명

해설

2050년은 2015년으로부터 35년 후이고 35년은 5년이 7번 지난 것이므로 2050년의 A의 인구는

$$100 \times (1 + 0.07)^7 = 100 \times 1.07^7 (\text{만 명})$$

$$\log 1.07^7 = 7 \log 1.07 = 7 \times 0.03 = 0.21$$

이때 $\log 1.62 = 0.21$ 이므로

$$1.07^7 = 1.62$$

따라서 2050년의 A 시의 인구는 $100 \times 1.62 = 162$ (만 명)

25. 두 양수 x, y 에 대하여 $\log(x+y)$ 의 정수 부분은 12이고, $\log xy$ 의 정수 부분은 6이다. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 값의 범위를 구하면 $a < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < b$ 이다. a 의 최댓값을 A , b 의 최솟값을 B 라고 할 때, $\log A + \log B$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 5 ④ 12 ⑤ 50

해설

$\log(x+y)$ 의 정수 부분이 12이므로 $12 \leq \log(x+y) < 13$
 즉, $10^{12} \leq x+y < 10^{13}$
 마찬가지로 $\log xy$ 의 정수 부분이 6이므로
 $6 \leq \log xy < 7 \therefore 10^6 \leq xy < 10^7$
 그런데 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{(x+y)}{xy}$ 이므로 부등식의 성질에 의해서
 $\frac{10^{12}}{10^7} < \frac{x+y}{xy} < \frac{10^{13}}{10^6} \therefore 10^5 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 10^7$
 따라서 a 의 최댓값은 $A = 10^5$ 이고 b 의 최솟값은 $B = 10^7$ 이므로
 $\log A + \log B = 5 + 7 = 12$