1. 수열 $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ \cdots$ 의 11번째 항은?

① -13 ② -10 ③ 11 ④ -11 ⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11번째 항은 11이다.

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5　　② 8　　③ 11　　④ 13　　⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

3. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $n \geq 3$일 때, $S_n = 94$를 만족하는 d의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$S_n = 94$에서 $\dfrac{n\{2+(n-1)d\}}{2} = 94$

$n\{2+(n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$

그런데 $n \geq 3$이므로 n의 값이 될수 있는 것은 $4,\ 47,\ 94,\ 188$이다.

$n = 4$일때, $2+(4-1)d = 47 \quad \therefore\ d = 15$

$n = 47$일때, $2+(47-1)d = 4 \quad \therefore\ d = \dfrac{2}{23}$

$n = 94$일때, $2+(94-1)d = 2 \quad \therefore\ d = 0$

$n = 188$일때, $2+(188-1)d = 1 \quad \therefore\ d = -\dfrac{1}{187}$

이 중에서 d가 자연수가 되는 것은 $n = 4$이므로 $d = 15$

4. 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 등차수열에 대하여 $S_5 = 25$, $S_7 = 49$일 때, S_{10}의 값은?

① 64　② 80　③ 92　④ 100　⑤ 120

해설

$S_5 = \frac{5(2a+4d)}{2} = 25$에서 $a + 2d = 5 \cdots$ ㉠

$S_7 = \frac{7(2a+6d)}{2} = 49$에서 $a + 3d = 7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$d = 2,\ a = 1$

$\therefore\ S_{10} = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$

5. 다음 보기의 수열 중 등비수열인 것은?

보기

㉠ $\{2n+1\}$	㉡ $\{n^2\}$
㉢ $\{3^{n+1}\}$	㉣ $\{5 \cdot 3^{n-2}\}$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

등비수열은 ar^{n-1} 의 꼴로
나타낼 수 있는 수열이므로

㉢ $3^{n+1} = 3^2 \cdot 3^{n-1}$
첫째항 $= 3^2$, 공비$= 3$

㉣ $5 \cdot 3^{n-2} = \frac{5}{3} \cdot 3^{n-1}$
첫째항$= \frac{5}{3}$, 공비$= 3$

6. 수열 $\omega,\ \omega^3,\ \omega^5,\ \omega^7,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라. $(\omega^3 = 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω, 공비가 ω^2, 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega\left\{(\omega^2)^{36} - 1\right\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$$

$$\therefore\ S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

7. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$의 값은?

① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$
$= \sum_{k=1}^{10}(a_k^3+3a_k^2+3a_k+1) - \sum_{k=1}^{10}(a_k^3-3a_k^2+3a_k-1)$
$= \sum_{k=1}^{10}(6a_k^2+2) = 6\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2$
$= 6\times 20 + 2\times 10 = 140$

8. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$= \sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$

$= \sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7j}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7\cdot\sum_{j=1}^{10} j\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6} + 7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}(385+385)$

$= 385$

9. 직각삼각형의 세 변의 길이가 공차 d인 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, 이 직각삼각형의 넓이를 d에 대한 식으로 나타내면?

① $4d^2$ ② $6d^2$ ③ $8d^2$ ④ $10d^2$ ⑤ $12d^2$

해설

세 변의 길이를 $a-d$, a, $a+d$로 놓으면 $a+d$가 빗변의 길이가 되므로 피타고라스의 정리에 의해

$(a+d)^2=(a-d)^2+a^2$

$a^2+2ad+d^2=a^2-2ad+d^2+a^2$

$a^2-4ad=0$, $a=4d$

그런데 $a>0$이므로 $a=4d$

따라서 직각삼각형의 세 변의 길이는 $3d$, $4d$, $5d$이므로

직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 3d\times 4d=6d^2$

10. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$ 의 값은?

① $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$ ② $\frac{n(3n+5)}{4(2n+1)(n+2)}$
③ $\frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$ ④ $\frac{n(3n+4)}{4(n+1)(n+2)}$
⑤ $\frac{n(3n+4)}{2(n+1)(n+2)}$

해설

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right\}$

$+\cdots+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

11. 수열 $\{a_n\}$이 $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$ 일 때, 계차수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n = \alpha^n$이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \beta^n + \gamma$이다. 이때, 실수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$

$\qquad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$

$\qquad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad \cdots \to b_n = 2^n$

$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$= 1 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$

$\alpha = 2,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$

12. 수열 $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots,$에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면

$1/\ 1,\ 2/1,\ 2,\ 3/\ 1,\ 2,\ 3,\ 4/\cdots$

1군은 1

2군은 1, 2

3군은 1, 2, 3이므로

7군은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$

(6까지의 항의 총수)$= 1 + 2 + \cdots + 6 = 21$

$21 + 7 = 28$(번째 항)

13. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$$\begin{array}{rl} & \vdots \\ + & a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ \hline & a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1) \\ & \quad = -1 + \dfrac{(n-1)\cdot n}{2} \end{array}$$

$\therefore a_{10} = -1 + \dfrac{9 \cdot 10}{2}$

$= -1 + 45 = 44$

14. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

가. $a_1 = 2$ 나. a_{n+1}은 $3a_n$을 5로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $a_{13} + a_{40}$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$a_1 = 2,\ 3a_1 = 6$을 5로 나눈 나머지는 1이므로
$a_2 = 1$ 같은 방법으로 $a_3 = 3,\ a_4 = 4,\ a_5 = 2$
$a_6 = 1,\ \cdots,\ a_{13} = a_1 = 2,\ a_{40} = a_4 = 4$이므로
$\therefore\ a_{13} + a_{40} = 2 + 4 = 6$

15. $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\sqrt[3]{3}=a$, $\sqrt[3]{2}=b$라고 하면
$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a^3+b^3$
$=3+2=5$

16. $a^{2x}=5$ 일 때, $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}$ 의 값은?

① $\dfrac{21}{5}$ ② $\dfrac{9}{2}$ ③ $\dfrac{31}{5}$ ④ $\dfrac{51}{5}$ ⑤ $\dfrac{63}{10}$

해설

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}$$

$$=\frac{25+\frac{1}{5}}{5-1}=\frac{\frac{126}{5}}{4}=\frac{126}{20}=\frac{63}{10}$$

17. 다음을 간단히 하여라.

$$\log_2 \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \text{ (단, } x > 1)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\log_2 \sqrt{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2} + \log_2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$
$$= \log_2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$
$$= \log_2 \{(x+1) - (x-1)\} = \log_2 2 = 1$$

18. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n$($n$은 자연수)으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014}$을 12로 나눈 나머지는?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

주어진 조건에서

$a_1 = 1$

$a_2 = 2a_1 = 1 \times 2$

$a_3 = 3a_2 = 1 \times 2 \times 3$

$\vdots$

$a_n = na_{n-1} = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$

그런데, $a_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$는 12의 배수이므로 $a_5,\ a_6,\ \cdots,\ a_{2014}$도 12의 배수이다.

따라서, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014}$을 12로 나눈 나머지는

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 \\ &= 1 + 2 + 6 \\ &= 9 \end{aligned}$$

19. $f(x)=2^x$ 일 때, 다음 중 16^{16}과 같은 것은?

① $f(f(1))$ ② $f(f(2))$ ③ $f(f(6))$

④ $f(f(10))$ ⑤ $f(f(16))$

해설

$f(x)=2^x$ 에서 $f(6)=2^6=64\cdots$㉠
$16^{16}=(2^4)^{16}=2^{64}=f(64)\cdots$㉡
㉡에 ㉠을 대입하면
$\therefore\ 16^{16}=f(64)=f(f(6))$

20. $\log_2 5$의 정수부분을 x, 소수부분을 y라 할 때, $\dfrac{2^{-x}+2^{-y}}{2^x+2^y}$의 값은?

① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 2

해설

$\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$이므로

$x=2,\ y=\log_2 5-2=\log_2 \frac{5}{4}$

$2^{-x}=2^{-2}=\dfrac{1}{4},\ 2^x=4$

$2^{-y}=2^{-\log_2 \frac{5}{4}}=2^{\log_2 (\frac{5}{4})^{-1}}=2^{\log_2 \frac{4}{5}}=\dfrac{4}{5}$

$2^y=2^{\log_2 \frac{5}{4}}=\dfrac{5}{4}$

$\therefore\ \dfrac{2^{-x}+2^{-y}}{2^x+2^y}=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{4}{5}}{4+\frac{5}{4}}=\dfrac{\frac{21}{20}}{\frac{21}{4}}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$

21. 자연수 A에 대하여 A^{50}이 67자리의 수일 때, A^{20}은 몇 자리의 수인가?

① 26자리　　② 27자리　　③ 28자리
④ 29자리　　⑤ 30자리

해설

67자리의 수이므로 $\log A^{50} = 66 + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$

$50 \log A = 66 + \alpha$

$\log A^{20} = 20 \log A = \frac{20}{50}(66+\alpha) = \frac{4}{10}(66+\alpha)$

$= 26.4 + \frac{4}{10}\alpha$

$0 \le \alpha < 1$이므로 $0 \le \frac{4}{10}\alpha < \frac{4}{10}$

$0.4 \le 0.4 + \frac{4}{10}\alpha < 0.8$이므로

$0.4 + \frac{4}{10}\alpha$가 가수, 지표는 26

$\therefore$ 27자리의 수

22. 실외 공기 중의 이산화탄소 농도가 0.03% 일 때, 실내 공간에서 공기 중의 초기 이산화탄소 농도 c(0)(%)를 측정한 후 , t 시간 뒤의 실내 공간의 이산화탄소 농도 $c(t)$(%)와 환기량 $Q(\mathrm{m}^3/\text{시})$의 관계는 다음과 같다.

$Q = k \times \dfrac{V}{t} \log \dfrac{c(0) - 0.03}{c(t) - 0.03}$ (단, k는 양의 상수이고, $V(\mathrm{m}^3)$는 실내 공간의 부피이다.)

실외 공기 중의 이산화탄소 농도가 0.03% 이고 환기량이 일정할 때, 초기 이산화탄소 농도가 0.83% 인 빈 교실에서 환기를 시작한 후 1 시간 뒤의 이산화탄소 농도를 측정하였더니 0.43% 이었다. 환기를 시작한 후 t 시간 뒤에 이산화탄소 농도가 0.08% 가 되었다면, t의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

초기 이산화탄소 농도 $C(0) = 0.83$ 이고, 1 시간 뒤
즉 $t = 1$ 일 때 이산화탄소 농도 $C(1) = 0.43$ 이므로
주어진 식에 $t = 1$을 대입하면 환기량

$$Q = k \times \frac{V}{1} \log \frac{0.83 - 0.03}{0.43 - 0.03} = kV \cdot \log 2$$

이다. 이산화탄소 농도가 0.08% 가 되는 t는

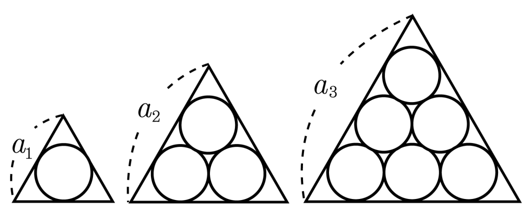
$$Q = k \times \frac{V}{t} \log \frac{0.83 - 0.03}{0.08 - 0.03} = \frac{4kV \log 2}{t}$$

를 만족한다. 그런데 환기량이 일정하므로

$$kV \log 2 = \frac{4kV \log 2}{t}$$

$\therefore t = 4$

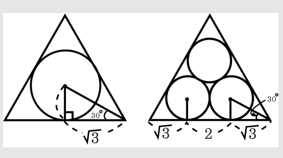
23. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 a_1이라 하고, 반지름의 길이가 1이고 서로 외접하는 세 원에 외접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 a_2라 한다.
이와 같이 계속하여 $a_n(n = 1, 2, 3, \cdots)$의 값을 정하면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 20항까지의 합은 $a + b\sqrt{3}$(a, b는 유리수)이다. 이때, $a - b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 340

해설



$a_1 = 2\sqrt{3}$
$a_2 = 2\sqrt{3} + 2$
$a_3 = 2\sqrt{3} + 2 \times 2$
$\vdots$
$a_n = 2\sqrt{3} + 2(n-1)$
a_n은 첫째항이 $2\sqrt{3}$이고
공차가 2인 등차수열이다.

$$S_{20} = \frac{20(2 \cdot 2\sqrt{3} + 19 \cdot 2)}{2}$$
$= 10(4\sqrt{3} + 38)$
$= 380 + 40\sqrt{3}$
$\therefore a = 380,\ b = 40$
$a - b = 340$

24. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(n), g(n)$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $f(n) = g(n)$이기 위한 필요충분조건은 $n = 1$이다.

ㄴ $10^{f(50)} \times 10^{g(50)} = 50$

ㄷ $f(10n)g(10n) = f(n)g(n) + g(n)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ (참)
(i) $f(n) = g(n)$인 경우는 $f(n) = g(n) = 0$ 인 경우이다.
$\log n = f(n) + g(n)$ 이므로 $\log n = 0, n = 1$이다.
(ii) $n = 1$이면 $\log 1 = 0$ 이므로 $f(1) = g(1) = 0$
(i), (ii)에서 필요충분조건이 성립한다.
ㄴ (참)
$\log 50 = 1 + \log 5 \ \therefore f(50) = 1, g(50) = \log 5$
$10^{f(50)} \times 10^{g(50)} = 10^1 \times 10^{\log 5} = 10 \times 5 = 50$
ㄷ (참)
$\log 10n = 1 + \log n = 1 + f(n) + g(n)$
$\therefore f(10n) = 1 + f(n), g(10n) = g(n)$
$\therefore f(10n)g(10n) = \{1 + f(n)\} \cdot g(n) = f(n)g(n) + g(n)$

25. $\log x$의 정수 부분은 n이고 $\log x$와 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1 일 때, x의 값을 구하면?

① $10^{n+\frac{2}{3}},\ 10^{n+\frac{1}{3}}$　② $10^{n},\ 10^{n+\frac{1}{3}}$　③ $10^{n+1},\ 10^{n+\frac{1}{3}}$
④ $10^{n+\frac{2}{3}},\ 10^{n+1}$　⑤ $10^{n+\frac{2}{3}},\ 10^{n+\frac{4}{3}}$

해설

$\log x = n + \alpha,\ 0 \le \alpha < 1$

$\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\alpha$

(i) n이 짝수일 때

$\log\sqrt{x} =$ 정수 $+\frac{1}{2}\alpha$

$\alpha + \frac{1}{2}\alpha = 1$

$\alpha = \frac{2}{3}$

$\therefore \log x = n + \frac{2}{3}$

$x = 10^{n+\frac{2}{3}}$

(ii) n이 홀수일 때

$\log\sqrt{x} =$ 정수 $+\ 0.5 + \frac{1}{2}\alpha$

$0 \le \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}$ 이므로

$\frac{1}{2}\alpha - 0.5$가 아닌

$\frac{1}{2}\alpha + 0.5$가 소수 부분이 됨

$\alpha + \frac{1}{2}\alpha + 0.5 = 1$

$\frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{1}{3}$

$\log x = n + \frac{1}{3}$

$x = 10^{n+\frac{1}{3}}$