1. $\sqrt[3]{\log_2 9} \times (\log_3 16)^{\frac{1}{3}}$ 의 값은?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt[3]{2}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt[2]{2}$

해설

$\sqrt[3]{\log_2 9} \times (\log_3 16)^{\frac{1}{3}} = (\log_2 9)^{\frac{1}{3}} \times (\log_3 16)^{\frac{1}{3}} = (2\log_2 3 \times 4\log_3 2)^{\frac{1}{3}}$

$= (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2$

2. 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, 수열 $b_n = 2^{a_n}$이다. 수열 $\{b_n\}$에서 처음으로 2000보다 커지는 항은? (단, $\log 2 = 0.3010$)

① 제5항　② 제6항　③ 제7항
④ 제8항　⑤ 제9항

해설

$a_n = 2n$이므로 $b_n = 2^{2n}$
$4^n > 2000$에서 $2n \log 2 > \log 2000$
$\therefore\ n > \dfrac{3.3010}{0.6020} = 5.48 \times \times\times$
따라서 제6항부터 처음으로 2000보다 커진다.

3. $\log_2 12 = a$일 때, $\log_3 6$을 a로 나타내면?

① $\dfrac{a-1}{a-2}$　② $\dfrac{a}{a-2}$　③ $\dfrac{a}{a-1}$　④ $\dfrac{a+1}{a-1}$　⑤ $\dfrac{a+2}{a}$

해설

$\log_2 12 = \log_2(2^2 \times 3) = 2 + \log_2 3$

즉, $2 + \log_2 3 = a$이므로 $\log_2 3 = a - 2$

$\therefore\ \log_3 6 = \dfrac{\log_2 6}{\log_2 3} = \dfrac{\log_2(2 \times 3)}{\log_2 3}$

$= \dfrac{1 + \log_2 3}{\log_2 3} = \dfrac{1 + (a-2)}{a-2} = \dfrac{a-1}{a-2}$

4. $\log_2 3 = a,\ \log_3 7 = b$일 때, $\log_{36} 42$를 $a,\ b$로 나타내면?

① $\dfrac{1+a+ab}{1+a}$ ② $\dfrac{1+a+2ab}{1+a}$ ③ $\dfrac{1+2a+ab}{2+a}$

④ $\dfrac{1+a+ab}{2(1+a)}$ ⑤ $\dfrac{2+a+2ab}{2(1+a)}$

해설

로그의 밑을 3으로 통일시키면

$\log_3 2 = \dfrac{1}{\log_2 3} = \dfrac{1}{a},\ \log_3 7 = b$

$\log_{36} 42 = \dfrac{\log_3 42}{\log_3 36} = \dfrac{\log_3(2\times 3\times 7)}{\log_3(2^2\times 3^2)}$

$= \dfrac{\log_3 2 + 1 + \log_3 7}{2\log_3 2 + 2}$

$\dfrac{\frac{1}{a}+1+b}{2\cdot\frac{1}{a}+2} = \dfrac{1+a+ab}{2(1+a)}$

5. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 1.5$ 의 값을 계산하면?

① 0.0880 ② 0.0885 ③ 0.1660

④ 0.1761 ⑤ 0.1777

해설

$\log_{10} 1.5 = \log_{10}(3 \times 5 \div 10)$

$= \log 3 + (1 - \log 2) - 1$

$= 0.1761$

6. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.123}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.6966

해설

상용로그표에서 $\log 1.23 = 0.0899$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.123} = \frac{1}{3}\log 0.123 = \frac{1}{3}\log 1.23 \times 10^{-1}$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.23 - 1) = \frac{1}{3}(0.0899 - 1)$$
$$= -0.3034 = -1 + 0.6966$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.123}$ 의 소수 부분은 0.6966 이다.

7. 다음 세 수에 대한 상용로그의 정수 부분의 합과 소수 부분의 합을 차례대로 나열한 것은?

0.02, 200, 2500

① 3, $\log_{10} 2$　② 3, $\log_{10} 6.5$　③ 3, 1
④ 4, 0　⑤ 4, $\log_{10} 6.5$

해설

$\log_{10} 0.02 = -2 + \log_{10} 2$,
$\log_{10} 200 = 2 + \log_{10} 2$,
$\log_{10} 2500 = 3 + \log_{10} 2.5$
정수 부분의 합은 $-2 + 2 + 3 = 3$
소수 부분의 합은 $\log_{10} 2 + \log_{10} 2 + \log_{10} 2.5 = 1$

8. $\log a$ 의 정수 부분이 2 일 때, $A = \log a\sqrt{a}$ 의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \le A < 3$
② $\frac{3}{2} < A \le 3$
③ $2\sqrt{2} \le A < 3\sqrt{3}$
④ $3 \le A < \frac{9}{2}$
⑤ $3 < A \le \frac{9}{2}$

해설

$\log a$ 의 정수 부분이 2 이므로 $2 \le \log a < 3$

$\log a\sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log a$

$\frac{3}{2} \times 2 \le \frac{3}{2}\log a < \frac{3}{2} \times 3$

$\therefore 3 \le A < \frac{9}{2}$

9. 상용로그 $\log x$ 의 정수 부분은 3이고, $\log x$ 와 $\log x^2$ 의 소수 부분의 합은 1이다. 이때, $\log x^3$ 의 값은?

① 9 또는 10 ② 10 또는 11 ③ 11 또는 12

④ 12 또는 13 ⑤ 13 또는 14

해설

$\log x = 3 + \alpha (0 \le \alpha < 1)$ 로 놓으면

$\log x^2 = 2\log x = 6 + 2\alpha (0 \le 2\alpha < 2)$ 이므로

(i) $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$ 일 때,

$\log x^2$ 의 소수 부분은 2α 이므로

$\alpha + 2\alpha = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$

(ii) $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ 일 때,

$\log x^2$ 의 소수 부분은 $2\alpha - 1$ 이므로

$\alpha + (2\alpha - 1) = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{2}{3}$

(i),(ii)에서 $\alpha = \frac{1}{3}$ 또는 $\alpha = \frac{2}{3}$ 이므로

$\log x^3 = 3\log x = 9 + 3\alpha$ 의 값은 10 또는 11 이다.

10. $[\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 20]$ 의 값은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$1 \le k < 10$일 때, $[\log_{10} k]=0$
$10 \le k < 100$일 때, $[\log_{10} k]=1$
$\therefore 0\times 9+1\times 11=11$

11. 수소 이온 농도는 용액 1L속에 존재하는 수소 이온의 그램이온수의 역수의 상용로그를 취하여 구하고, 기호 pH로 나타낸다.

즉, $\mathrm{pH} = \log \frac{1}{[\mathrm{H}^+]}$ ($[\mathrm{H}^+]$는 수소 이온의 그램이온수)이다. 두 용액 A, B의 수소 이온 농도가 각각 4, 6이고 수소 이온의 그램이온수가 각각 a, b일 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

① $\frac{1}{100}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ 1 ④ 10 ⑤ 100

해설

$4 = \log \frac{1}{a}$ 에서 $\frac{1}{a} = 10^4 \quad \therefore\ a = 10^{-4}$

$6 = \log \frac{1}{b}$ 에서 $\frac{1}{b} = 10^6 \quad \therefore\ b = 10^{-6}$

$\therefore\ \frac{a}{b} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^{-4-(-6)} = 10^2 = 100$

12. $\log_{(x-2)^2}(-x^2+x+12)$가 정의되도록 x의 값을 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 3　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 9

해설

로그의 밑과 진수의 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
로그의 밑은 1이 아닌 양수이므로
$(x-2)^2 \neq 1,\ (x-2)^2 > 0$
$\therefore\ x \neq 1,\ x \neq 2,\ x \neq 3 \cdots$ ㉠
로그의 진수는 양수이므로
$-x^2+x+12>0$에서 $x^2-x-12<0$
$\therefore\ -3<x<4 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 정수 x의 값은 $-2-2, 0$이다.

13. $\log\left(1-\frac{1}{4}\right)+\log\left(1-\frac{1}{9}\right)+\log\left(1-\frac{1}{16}\right)+\cdots+\log\left(1-\frac{1}{64}\right)$을 간단히 하면?

① $2\log 3-4\log 2$　② $3\log 2-2\log 3$
③ $3\log 3-4\log 2$　④ $4\log 2-3\log 3$
⑤ $4\log 3-2\log 2$

해설

$1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \log\tfrac{1\cdot3}{2^2}\times\tfrac{2\cdot4}{3^2}\times\cdots\times\tfrac{7\cdot9}{8^2}\\ &=\log\tfrac{1}{2}\times\tfrac{9}{8}=\log\tfrac{9}{16}\\ &=\log 9-\log 16\\ &=2\log 3-4\log 2\end{aligned}$$

14. 무게가 $2^{30}g$ 인 물건이 있다. 이 물건의 무게를 $1g, 10g, 10^2g, \cdots$ 등의 추를 사용하여 측정하고자 한다. 사용하고자 하는 추의 개수를 최소로 할 때, 사용되는 가장 무거운 추의 무게를 구하면? (단 $\log 2 = 0.3010$)

① 10^7g　② 10^8g　③ 10^9g　④ $10^{10}g$　⑤ $10^{11}g$

해설

$\log 2^{30} = 30 \log 2 = 9.030$
따라서 $9 < \log 2^{30} < 10$ 즉, $10^9 < 2^{30} < 10^{10}$
따라서 가장 무거운 추의 무게는 10^9g 이다.

15. $\log x$의 정수 부분이 4이고 $\log x$의 소수 부분과 $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분이 같을 때 x의 값은? (단, $\log x$의 소수 부분은 0이 아니다.)

① $10^{4.1}$　② $10^{4.2}$　③ $10^{4.3}$　④ $10^{4.4}$　⑤ $10^{4.5}$

해설

$\log x$의 정수 부분이 4이고
$\log x$의 소수 부분이 0이 아니므로
$4 < \log x < 5 \cdots$ ㉠
$\log x$와 $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분이 같으므로
$\log x - \log \sqrt[3]{x}$는 정수이어야 한다.

$\log x - \log \sqrt[3]{x} = \log x - \frac{1}{3}\log x = \frac{2}{3}\log x$(정수)

㉠에 의하여

$\frac{8}{3} < \frac{2}{3}\log x < \frac{10}{3}$ 이므로

$\frac{2}{3}\log x = 3,\ \ \log x = \frac{9}{2}$

$\therefore x = 10^{\frac{9}{2}} = 10^{4.5}$

16. $\log x$의 정수 부분은 3이고 $\log x$의 소수 부분과 $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합이 $\frac{1}{3}$일 때, x의 값은?

① 1000　　② $1000\sqrt{10}$　　③ $1000\sqrt[3]{10}$

④ $1000\sqrt[4]{10}$　　⑤ $1000\sqrt[5]{10}$

해설

$\log x$의 소수 부분을 α라 하면 $\log x = 3 + \alpha (0 \le \alpha < 1)$

$\log \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\log x = \frac{1}{3}(3+\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{3}$

이때, $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분은 $\frac{\alpha}{3}$이므로

$\alpha + \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}\alpha = \frac{1}{3}$ $\therefore \alpha = \frac{1}{4}$

따라서 $\log x = 3 + \frac{1}{4}$이므로

$x = 10^{3+\frac{1}{4}} = 10^3 \cdot 10^{\frac{1}{4}} = 1000\sqrt[4]{10}$

17. 다음은 로그의 성질 $\log q^r = r\log q$를 이용하여 m이 0이 아닌 실수일 때, $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$(단, a는 1이 아닌 양수, b는 양수)가 성립함을 증명한 것이다.

$x = \log_{a^m} b^n$로 놓으면 $b^n =$ (가) $= (a^x)^{(나)}$ 이므로 $a^x =$ (다) 따라서 $x = \log_a$(다) $= \frac{n}{m}\log_a b$가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① (가) : a^x, (나) : m, (다) b^n

② (가) : a^x, (나) : $\frac{m}{n}$, (다) $b^{\frac{n}{m}}$

③ (가) : $(a^m)^x$, (나) : m, (다) $b^{\frac{n}{m}}$

④ (가) : $(a^m)^x$, (나) : m, (다) b^n

⑤ (가) : $(a^m)^x$, (나) : $\frac{m}{n}$, (다) $b^{\frac{n}{m}}$

해설

$x = \log_{a^m} b^n$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$b^n = (a^m)^x = (a^x)^m$

위의 식의 양변을 $\frac{1}{m}$ 제곱하면 $b^{\frac{n}{m}} = a^x$

따라서, $x = \log_a b^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}\log_a b$가 성립한다.

18. 1이 아닌 양수 a, b, c가 다음 두 조건을 만족한다.

> ㉠ $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 4$
>
> ㉡ $\log_b a + \log_c b + \log_a c = -3$

이 때, $(\log_a b)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c a)^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$\log_a b = \alpha$, $\log_b c = \beta$, $\log_c a = \gamma$라 하면

$\log_a b + \log_b c + \log_c a = \alpha + \beta + \gamma = 4 \cdots$ ㉠

$\log_b a + \log_c b + \log_a c = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -3 \cdots$ ㉡

㉡에서 $\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -3$ 이고

$\alpha\beta\gamma = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$이므로

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3$

$\therefore (\log_a b)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c a)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 22$

19. 1보다 큰 양수 a, b, c에 대하여 $a^{x} = b^{2y} = c^{3z} = 64$, $\log_2 abc = 12$ 가 성립할 때, $\frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}$의 값은?

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

해설

a^{64}에서 $x = \log_a 64$

$\frac{1}{x} = \log_{64} a = \log_{2^6} a = \frac{1}{6}\log_2 a$

$b^{2y} = 64$에서 $2y = \log_b 64$

$\frac{1}{2y} = \log_{64} b = \log_{2^6} b = \frac{1}{6}\log_2 b$

$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}\log_2 b$

$c^{3z} = 64$에서 $3z = \log_c 64$

$\frac{1}{3z} = \log_{64} c = \log_{2^6} c = \frac{1}{6}\log_2 c$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\log_2 c$

$\therefore\ \frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 6 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{y} + 2 \cdot \frac{1}{z}$

$= 6 \cdot \frac{1}{6}\log_2 a + 3 \cdot \frac{1}{3}\log_2 b + 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 c$

$= \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = \log_2 abc = 12$

20. 다음 세 조건을 만족시키는 $\log a,\ \log b,\ \log c$를 세 변으로 하는 삼각형을 만들려고 한다. 이때, $a,\ b,\ c$의 값은?

> ㉠ $a,\ b,\ c$는 한 자리의 정수이다.
>
> ㉡ $a,\ b,\ c$의 합은 16이다.
>
> ㉢ $\log b$의 소수 부분은 $\log a$의 소수 부분의 2배이다.

① $a=3,\ b=9,\ c=4$　　② $a=2,\ b=8,\ c=6$

③ $a=3,\ b=8,\ c=5$　　④ $a=3,\ b=7,\ c=6$

⑤ $a=2,\ b=6,\ c=8$

해설

$a,\ b,\ c$는 한 자리 정수이므로 $\log^a,\ \log^b,\ \log^c$의 정수 부분은 모두 0이다.

$\log^a=\alpha(0<\alpha<1)$

$\log^b=\beta(0<\beta<1)$

$\log^c=\gamma(0<\gamma<1)$ 라 하면

㉢에 의해 $\beta=2\alpha$

$\therefore \log^b=2\log^a=\log^{a^2}$

$b=a^2$

(i) $a=1$ 일 때 $b=1,\ c=14$

c는 두자리 정수이므로 모순

(ii) $a=2$ 일 때 $b=4,\ c=10$

c는 두자리 정수이므로 모순

(iii) $a=3$ 일 때 $b=9,\ c=4$

(iv) $a=4$일 때 $b=16$ 이므로 모순

$\vdots$

$\therefore a=3,\ b=9,\ c=4$

21. $N=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\cdots(2^{512+1})$ 일 때, $N+1$ 은 몇자리 정수인지 구하여라. (단, $\log 2=0.3$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 308

해설

$N=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\cdots(2^{512+1})$
$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\cdots(2^{512+1})$
$=2^{1024}-1$
에서 $N+1=2^{1024}$
$\therefore \log(N+1)=\log 2^{1024}=1024\log 2=1024\times 0.3=307.2$
따라서 $N+1$ 의 상용로그의 지표가 307 이므로 $N+1$ 은 308 자리 정수이다.