1. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$ ㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = 25^{\sqrt{2}}$

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$

① ㉢ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 2^2 = 4$(참)

㉡$(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = (5\times5)^{\sqrt{2}} = 25^{\sqrt{2}}$(참)

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (3^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$(참)

2. $\sqrt[3]{a\sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$를 간단히 하면?

① $\sqrt[4]{a^3}$　② $\sqrt[6]{a^5}$　③ $\sqrt[13]{a^5}$　④ $\sqrt[7]{a^8}$　⑤ $\sqrt{a^5}$

해설

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$$
$$= \sqrt[3]{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$$
$$= (a^{1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$$

3. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x 의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} 8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} &= 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5 \end{aligned}$$

$\therefore x = 5$

4. $a = 5 \times 729^x$ 일 때, 27^x 을 a에 관한 식으로 나타내면?

① $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$ ② $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ ③ $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

④ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

해설

$a = 5 \times 729^x = 5 \times (3^6)^x = 5 \times 3^{6x}$

$\frac{a}{5} = 3^{6x} = (3^{3x})^2$

$\therefore\ 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ 27^x = 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

5. $\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$를 $2^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

$$\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \times 2}}}$$
$$= \sqrt{4\sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2 \cdot \sqrt[12]{2^5}}$$
$$= \sqrt{\sqrt[12]{2^{24} \times 2^5}} = \sqrt[24]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{24}}$$

따라서 $P = 29$, $q = 24$이므로 $p + q = 53$

6. $a>0$일 때, $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$을 간단히 하면?

① $\sqrt{a}$ ② $\sqrt[3]{a}$ ③ $\sqrt[3]{a^2}$ ④ $\sqrt[4]{a}$ ⑤ $\sqrt[6]{a}$

해설

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}=\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}\times\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}=\frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a}}=\sqrt[6]{\frac{a^2}{a}}=\sqrt[6]{a}$$

7. $a>0, a\neq 1$ 일 때, $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}}=a^k$ 을 만족시키는 유리수 k 의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{8}$　⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$$\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}}$$
$$=\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\cdot a^{\frac{1}{4}}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}}}$$
$$=\sqrt[3]{a\cdot\left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}}$$
$$=\sqrt[3]{a\cdot a^{\frac{5}{12}}}\times\sqrt[3]{(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}}$$
$$=(a^{\frac{17}{12}})^{\frac{1}{3}}\times(a^{\frac{1}{12}})^{\frac{1}{3}}$$
$$=a^{\frac{17}{36}+\frac{1}{36}}=a^{\frac{18}{36}}=a^{\frac{1}{2}}$$

8. 2 이상의 서로 다른 두 자연수 m, n에 대하여
$\sqrt[m]{100} \times \sqrt[n]{10} = 10$을 만족할 때, 두 자연수 $m,\ n$의 합 $m+n$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\sqrt[m]{100} \times \sqrt[n]{10} = 10^{\frac{2}{m}} \times 10^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{2}{m}+\frac{1}{n}} = 10$

$\therefore \dfrac{2}{m} + \dfrac{1}{n} = 1$

$2n + m = mn,\ (m-2)(n-1) = 2$

$m,\ n$은 $m \ge 2,\ n \ge 2$ 인 서로 다른 자연수이므로

$m-2 \ge 0,\ n-1 \ge 1$

$\therefore m-2 = 2,\ n-1 = 1$

$\therefore m = 4,\ n = 2 \quad \therefore m+n = 6$

9. $(7^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}})$ 의 값은?

① 2　　② 6　　③ 10　　④ 14　　⑤ 18

해설

$(7^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}})$

$\left\{(7^{\frac{1}{4}})^2 - (5^{\frac{1}{4}})^2\right\}(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}})$

$= (7^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}) = (7^{\frac{1}{2}})^2 - (5^{\frac{1}{2}})^2$

$= 7 - 5 = 2$

10. $\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}\right)^3$ 을 계산하면?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

해설

$(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3})^3-1=2$ 이므로

$\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\sqrt[3]{3}-1$

$(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3})^3+1=4$ 이므로

$\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}=\sqrt[3]{3}+1$

$\therefore \left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}\right)^3$

$=(\sqrt[3]{3}-1+\sqrt[3]{3}+1)^3=(2\cdot\sqrt[3]{3})^3=24$

11. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$ 일 때, $a+a^{-1}$ 의 값을 구하여라.(단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$ 의 양변을 제곱하면 $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=4^2$

$a+a^{-1}+2=16$

$\therefore a+a^{-1}=14$

12. $2^x = 3$일 때, $\dfrac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{8}$　② $\dfrac{3}{13}$　③ $\dfrac{3}{10}$　④ $\dfrac{3}{8}$　⑤ $\dfrac{3}{7}$

해설

$$\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} = \frac{2^x - \dfrac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \dfrac{1}{(2^x)^2}}$$

$$= \frac{3 - \dfrac{1}{3}}{3^2 - \dfrac{1}{3^2}} = \frac{\dfrac{8}{3}}{\dfrac{80}{9}} = \frac{3}{10}$$

13. $2^{2x} = 3$ 일 때, $\dfrac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{2}{7}$ ③ $\dfrac{3}{8}$ ④ $\dfrac{3}{7}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 2^{3x}를 곱하면

$$\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}} = \frac{(2^x + 2^{-x}) \times 2^{3x}}{(2^{3x} + 2^{-3x}) \times 2^{3x}}$$

$$= \frac{2^{4x} + 2^{2x}}{2^{6x} + 1} = \frac{(2^{2x})^2 + 2^{2x}}{(2^{2x})^3 + 1}$$

$$= \frac{3^2 + 3}{3^3 + 1} = \frac{3}{7}$$

14. $20^a = 5\sqrt{3}$, $20^b = 2$ 일 때, $10^{\frac{2a}{1-b}}$ 의 값은?

① 25 ② 35 ③ 55 ④ 65 ⑤ 75

해설

주어진 조건과 같이 밑이 20 이 되도록 구하려는 식을 변형한다.

$10 = \dfrac{20}{2} = \dfrac{20}{20^b} = 20^{1-b}$

$\therefore 10^{\frac{2a}{1-b}} = (20^{1-b})^{\frac{2a}{1-b}} = 20^{2a} = (20^a)^2 = (5\sqrt{3})^2 = 75$

15. n이 2이상의 자연수일 때, 거듭제곱에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ n이 홀수일 때, $\sqrt[n]{-5} = -\sqrt[n]{5}$이다.

㉡ n이 짝수일 때, $\sqrt[n]{(-5)^n} = -5$이다.

㉢ n이 홀수일 때, $x^n = -5$를 만족하는 실수 x는 1개다.

㉣ n이 짝수일 때, $x^n = 5$를 만족하는 실수 x는 n개다.

① ㉠, ㉢ ② ㉡, ㉢ ③ ㉡, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

㉠ n이 홀수일 때, 양변을 n제곱하면
$(\sqrt[n]{-5})^n = -5,\ (-\sqrt[n]{5})^n = -5$
$\therefore \sqrt[n]{-5} = -\sqrt[n]{5}$

㉡ n이 짝수일 때, $\sqrt[n]{(-5)^n} = 5$

㉢ n이 홀수일 때, $x^n = -5$를 만족하는 실수 x는 $\sqrt[n]{-5}$의 1개이다.

㉣ n이 짝수일 때, $x^n = 5$를 만족하는 실수 x는 $\pm\sqrt[n]{5}$의 2개이다.
이상에서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

16. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ n이 홀수일 때, -5의 실수인 n제곱근은 $-\sqrt[n]{5}$이다.

ㄴ $2^{\sqrt{2}-1}2^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 4^{\sqrt{2}}$

ㄷ $(\sqrt{3})^{2^{2^2}} = \left[\left\{(\sqrt{3})^2\right\}^2\right]^2$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ n이 홀수일 때, -5의 실수인 n제곱근은 $\sqrt[n]{-5} = -\sqrt[n]{5}$이다. (참)

ㄴ $2^{\sqrt{2}-1}2^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 4^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}-1}2^{\sqrt{2}+1}$
$= 2^{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)}$
$= 2^{2\sqrt{2}} = (2^2)^{\sqrt{2}} = 4^{\sqrt{2}}$(참)

ㄷ $(\sqrt{3})^{2^{2^2}} = (\sqrt{3})^{2^4} = (\sqrt{3})^{16} = 3^8$

$\left[(\sqrt{3})^{2^2}\right]^2 = (3^2)^2 = 3^4$

$\therefore (\sqrt{3})^{2^{2^2}} \neq \left[(\sqrt{3})^{2^2}\right]^2$ (거짓)

17. m, n이 양의 정수이고 a가 양수일 때, 다음 중 실수인 것은 모두 몇 개인가?

$\sqrt[2m]{(-a)^{2n}}$
$\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n}}$
$\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n-1}}$
$\sqrt[2m]{(-a)^{2n-1}}$

① 4개　② 3개　③ 2개　④ 1개　⑤ 없다.

해설

(i) $(-a)^{2n} > 0$ 이므로 실수
(ii) $(-2a)^{2n} > 0$ 이므로 실수
(iii) $(-a)^{2n-1} < 0,\ (2m-1)$은 홀수이므로 실수
(iv) $(-a)^{2n-1} < 0,\ m$은 짝수이므로 실수가 아니다.
$\therefore$ 실수는 3개

18. $8^x = \sqrt{\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}}$ 을 만족하는 x의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{10}$　④ $\frac{1}{12}$　⑤ $\frac{1}{14}$

해설

$8^x = \sqrt{\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}}$ 에서

$2^{3x} = \sqrt{\sqrt{\frac{8+2\sqrt{7}}{2}} - \sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{2}}}$

$= \sqrt{\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$

$3x = \frac{1}{4} \quad \therefore x = \frac{1}{12}$

19. $a = \sqrt{2},\ b = \sqrt[3]{4},\ c = \sqrt[3]{5}$ 일 때, 세 수 a, b, c 의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a < b < c$　　② $c < b < a$　　③ $b < c < a$

④ $a < c < b$　　⑤ $c < a < b$

해설

$a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$b = \sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$

$c = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ 이므로 세 수를 각각 6 제곱한다.

$a^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$

$b^6 = (4^{\frac{1}{3}})^6 = 4^2 = 16$

$c^6 = (5^{\frac{1}{3}})^6 = 5^2 = 25$

$8 < 16 < 25$ 이므로 $a < b < c$

20. $p=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$
$\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$에 대하여 $2-p=2^k$일 때, 실수 k의 값은?

① -5 ② -16 ③ -30 ④ -31 ⑤ -32

해설

$p=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$
$\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$의 양변에 $\left(1-\frac{1}{2}\right)$을 곱하면

$\left(1-\frac{1}{2}\right)p$
$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)$
$\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$
$\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{2^{16}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)=1-\frac{1}{2^{32}}$

$\frac{1}{2}p=1-\frac{1}{2^{32}}$, $p=2-\frac{1}{2^{31}}$

$2-p=\frac{1}{2^{31}}=2^{-31}$

$\therefore\ k=-31$

21. $2^x = 3^y = 6^z$ 일 때, $6^{\frac{z}{x}-\frac{z}{y}}$ 의 값은?(단, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$)

① -1　　② $\frac{2}{3}$　　③ 1　　④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$2^x = 3^y = 6^z$ 에서

$2^x = 6^z,\ (2^x)^{\frac{1}{x}} = (6^z)^{\frac{1}{x}}\quad \therefore\ 6^{\frac{z}{x}} = 2$

$3^y = 6^z,\ (3^y)^{\frac{1}{y}} = (6^z)^{\frac{1}{y}}\quad \therefore\ 6^{\frac{z}{y}} = 3$

$\therefore\quad 6^{\frac{z}{x}-\frac{z}{y}} = 6^{\frac{z}{x}} \div 6^{\frac{z}{y}} = 2 \div 3 = \frac{2}{3}$

22. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$ 에 대하여 $f(2\alpha) = 10$, $f(2\beta) = 8$ 일 때, $f(\alpha+\beta)f(\alpha-\beta)$ 의 값은?

① 5　　② $\frac{9}{2}$　　③ $\frac{12}{2}$　　④ 9　　⑤ 18

해설

$f(2\alpha) = \frac{1}{2}(3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}) = 10$

$\therefore 3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha} = 20$

$f(2\beta) = \frac{1}{2}(3^{2\beta} + 3^{-2\beta}) = 8$

$\therefore 3^{2\beta} + 3^{-2\beta} = 16$

$f(\alpha+\beta)f(\alpha-\beta)$

$= \frac{1}{2}(3^{\alpha+\beta} + 3^{-\alpha-\beta}) \cdot \frac{1}{2}(3^{\alpha-\beta} + 3^{-\alpha+\beta})$

$= \frac{1}{4}(3^{2\alpha} + 3^{2\beta} + 3^{-2\beta} + 3^{-2\alpha})$

$= \frac{1}{4}(3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha} + 3^{2\beta} + 3^{-2\beta})$

$= \frac{1}{4}(20 + 16) = 9$

23. $0 < a < 1$ 이고 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ 일 때, $\dfrac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}}$ 의 값은?

① $-\sqrt{15}$ ② $-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$
④ $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

해설

$(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + a^{-1} + 2 = 10$

$\therefore a + a^{-1} = 8$

$(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4 = 64 - 4 = 60$

$0 < a < 1$ 이므로 $a - a^{-1} = a - \dfrac{1}{a} < 0$

$\therefore a - a^{-1} = -\sqrt{60} = -2\sqrt{15}$

$\therefore \dfrac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}} = -\dfrac{2\sqrt{15}}{8} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

24. 세 자연수 $a,\ b,\ c$와 실수 $p,\ q,\ r,\ s$에 대하여 $a^p+b^q+c^r=105^8,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{8}$을 만족할 때, $a+b+c$의 값은? (단, $a>b>c$)

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

$a^p+b^q+c^r=105^8=k$라 하면
$a=k^{\frac{1}{p}}\cdots$(㉠)
$b=k^{\frac{1}{q}}\cdots$(㉡)
$c=k^{\frac{1}{r}}\cdots$(㉢)
$105=k^{\frac{1}{8}}$
(㉠)$\times$(㉡)$\times$(㉢)을 하면
$abc=k^{\frac{1}{p}}\times k^{\frac{1}{q}}\times k^{\frac{1}{r}}=k^{(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{c})}=k^{\frac{1}{8}}=105$
따라서 $abc=105=3\times5\times7$이고
$a>b>c$이므로 $a=7,\ b=5,\ c=3$
$\therefore a+b+c=15$

25. 세 자리의 자연수 M에 대하여 M의 십의 자리와 일의 자리의 숫자를 서로 바꾼 수를 N이라 하자. 이때, $(M-N)^{\frac{1}{3}}$ 이 정수가 되는 자연수 M의 개수는? (단, $M > N$)

① 45 ② 54 ③ 63 ④ 72 ⑤ 81

해설

M의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 a, b, c라고 하면

$M = 100a + 10b + c, N = 100a + 10c + b$

이므로 $M - N = 9(b-c) = 3^2(b-c)$

$(M-N)^{\frac{1}{3}}$ 이 정수가 되려면 $b-c$가 -3, 0, 3이 되어야 한다.

그런데 $M > N$에서 $b > c$이므로 $b - c = 3$

따라서, b, c의 순서쌍 (b, c)는

$(3, 0)$, $(4, 1)$, $(5, 2)$, $\cdots$, $(8, 5)$, $(9, 6)$의 7개이고,

a는 $1 \le a \le 9$인

자연수이므로 세 자리의 자연수

M의 개수는 $7 \times 9 = 63$(개)