

1. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$

㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = 25^{\sqrt{2}}$

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$

① ㉢

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2^2 = 4$ (참)

㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = (5 \times 5)^{\sqrt{2}} = 25^{\sqrt{2}}$ (참)

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (3^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$ (참)

2. $\sqrt[3]{a \sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$ 를 간단히 하면?

① $\sqrt[4]{a^3}$

② $\sqrt[6]{a^5}$

③ $\sqrt[13]{a^5}$

④ $\sqrt[7]{a^8}$

⑤ $\sqrt{a^5}$

해설

$$\sqrt[3]{a \sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$$

$$= \sqrt[3]{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$$

$$= (a^{1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$$

3. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x 의 값을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} 8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} &= 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 5$$

4. $a = 5 \times 729^x$ 일 때, 27^x 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$

② $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

③ $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

④ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

⑤ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

해설

$$a = 5 \times 729^x = 5 \times (3^6)^x = 5 \times 3^{6x}$$

$$\frac{a}{5} = 3^{6x} = (3^{3x})^2$$

$$\therefore 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 27^x = 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

5. $\sqrt{4 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}}$ 를 $2^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4 \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{2}}} &= \sqrt{4 \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4} \times 2}} \\ &= \sqrt{4 \sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2 \cdot \sqrt[12]{2^5}} \\ &= \sqrt[12]{2^{24} \times 2^5} = \sqrt[12]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{12}}\end{aligned}$$

따라서 $p = 12, q = 29$ 이므로 $p + q = 41$

6. $a > 0$ 일 때, $\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{a}$

② $\sqrt[3]{a}$

③ $\sqrt[3]{a^2}$

④ $\sqrt[4]{a}$

⑤ $\sqrt[6]{a}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}} &= \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} = \\ \sqrt[6]{\frac{a^2}{a}} &= \sqrt[6]{a}\end{aligned}$$

7. $a > 0, a \neq 1$ 일 때, $\sqrt[3]{a \sqrt[3]{a \sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}} = a^k$ 을 만족시키는 유리수 k 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{8}$

⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[3]{a \sqrt[3]{a \sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}} \\
 &= \sqrt[3]{a \sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{1}{4}}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}}}} \\
 &= \sqrt[3]{a \cdot \left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}} \\
 &= \sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{5}{12}}} \times \sqrt[3]{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \left(a^{\frac{17}{12}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(a^{\frac{1}{12}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= a^{\frac{17}{36} + \frac{1}{36}} = a^{\frac{18}{36}} = a^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

8. 2 이상의 서로 다른 두 자연수 m, n 에 대하여
 $\sqrt[m]{100} \times \sqrt[n]{10} = 10$ 을 만족할 때, 두 자연수 m, n 의 합 $m+n$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\sqrt[m]{100} \times \sqrt[n]{10} = 10^{\frac{2}{m}} \times 10^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{2}{m} + \frac{1}{n}} = 10$$

$$\therefore \frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

$$2n + m = mn, (m-2)(n-1) = 2$$

m, n 은 $m \geq 2, n \geq 2$ 인 서로 다른 자연수이므로

$$m-2 \geq 0, n-1 \geq 1$$

$$\therefore m-2 = 2, n-1 = 1$$

$$\therefore m = 4, n = 2 \quad \therefore m+n = 6$$

9. $(7^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}})$ 의 값은?

① 2

② 6

③ 10

④ 14

⑤ 18

해설

$$(7^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}})$$

$$\{(7^{\frac{1}{4}})^2 - (5^{\frac{1}{4}})^2\} (7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}})$$

$$= (7^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}) = (7^{\frac{1}{2}})^2 - (5^{\frac{1}{2}})^2$$

$$= 7 - 5 = 2$$

10. $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} + \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}\right)^3$ 을 계산하면?

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24

해설

$(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 - 1 = 2$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3} - 1$$

$(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 + 1 = 4$ 이므로

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3} + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} + \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}\right)^3 \\ = (\sqrt[3]{3} - 1 + \sqrt[3]{3} + 1)^3 = (2 \cdot \sqrt[3]{3})^3 = 24 \end{aligned}$$

11. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 일 때, $a + a^{-1}$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 제곱하면 $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = 4^2$

$$a + a^{-1} + 2 = 16$$

$$\therefore a + a^{-1} = 14$$

12. $2^x = 3$ 일 때, $\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{3}{13}$

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} &= \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \frac{1}{(2^x)^2}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3^2 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{80}{9}} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

13. $2^{2x} = 3$ 일 때, $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{2}{7}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{3}{7}$

⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 2^{3x} 를 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}} &= \frac{(2^x + 2^{-x}) \times 2^{3x}}{(2^{3x} + 2^{-3x}) \times 2^{3x}} \\&= \frac{2^{4x} + 2^{2x}}{2^{6x} + 1} = \frac{(2^{2x})^2 + 2^{2x}}{(2^{2x})^3 + 1} \\&= \frac{3^2 + 3}{3^3 + 1} = \frac{3}{7}\end{aligned}$$

14. $20^a = 5\sqrt{3}$, $20^b = 2$ 일 때, $10^{\frac{2a}{1-b}}$ 의 값은?

① 25

② 35

③ 55

④ 65

⑤ 75

해설

주어진 조건과 같이 밑이 20이 되도록 구하려는 식을 변형한다.

$$10 = \frac{20}{2} = \frac{20}{20^b} = 20^{1-b}$$

$$\therefore 10^{\frac{2a}{1-b}} = (20^{1-b})^{\frac{2a}{1-b}} = 20^{2a} = (20^a)^2 = (5\sqrt{3})^2 = 75$$

15. n 이 2이상의 자연수일 때, 거듭제곱에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ n 이 홀수일 때, $\sqrt[n]{-5} = -\sqrt[n]{5}$ 이다.
 ㉡ n 이 짝수일 때, $\sqrt[n]{(-5)^n} = -5$ 이다.
 ㉢ n 이 홀수일 때, $x^n = -5$ 를 만족하는 실수 x 는 1개다.
 ㉤ n 이 짝수일 때, $x^n = 5$ 를 만족하는 실수 x 는 n 개다.

① ㉠, ㉢

② ㉡, ㉢

③ ㉡, ㉤

④ ㉠, ㉡, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉤

해설

㉠ n 이 홀수일 때, 양변을 n 제곱하면

$$(\sqrt[n]{-5})^n = -5, (-\sqrt[n]{5})^n = -5$$

$$\therefore \sqrt[n]{-5} = -\sqrt[n]{5}$$

㉡ n 이 짝수일 때, $\sqrt[n]{(-5)^n} = 5$

㉢ n 이 홀수일 때, $x^n = -5$ 를 만족하는 실수 x 는 $\sqrt[n]{-5}$ 의 1개이다.

㉤ n 이 짝수일 때, $x^n = 5$ 를 만족하는 실수 x 는 $\pm\sqrt[n]{5}$ 의 2개이다.
 이상에서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

16. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ n 이 홀수일 때, -5 의 실수인 n 제곱근은 $-\sqrt[n]{5}$ 이다.

㉡ $2^{\sqrt{2}-1} 2^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 4^{\sqrt{2}}$

㉢ $(\sqrt{3})^{2^{2^2}} = \left[\{(\sqrt{3})^2\}^2 \right]^2$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ n 이 홀수일 때, -5 의 실수인 n 제곱근은 $\sqrt[n]{-5} = -\sqrt[n]{5}$ 이다.
(참)

$$\begin{aligned} \text{㉡ } 2^{\sqrt{2}-1} 2^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} &= 4^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}-1} 2^{\sqrt{2}+1} \\ &= 2^{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)} \\ &= 2^{2\sqrt{2}} = (2^2)^{\sqrt{2}} = 4^{\sqrt{2}} \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\text{㉢ } (\sqrt{3})^{2^{2^2}} = (\sqrt{3})^{2^4} = (\sqrt{3})^{16} = 3^8$$

$$\left[(\sqrt{3})^{2^2} \right]^2 = (3^2)^2 = 3^4$$

$$\therefore (\sqrt{3})^{2^{2^2}} \neq \left[(\sqrt{3})^{2^2} \right]^2 \text{ (거짓)}$$

17. m, n 이 양의 정수이고 a 가 양수일 때, 다음 중 실수인 것은 모두 몇 개인가?

$$\sqrt[2m]{(-a)^{2n}}$$

$$\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n}}$$

$$\sqrt[2m-1]{(-a)^{2n-1}}$$

$$\sqrt[2m]{(-a)^{2n-1}}$$

① 4개

② 3개

③ 2개

④ 1개

⑤ 없다.

해설

(i) $(-a)^{2n} > 0$ 이므로 실수

(ii) $(-2a)^{2n} > 0$ 이므로 실수

(iii) $(-a)^{2n-1} < 0$, $(2m-1)$ 은 홀수이므로 실수

(iv) $(-a)^{2n-1} < 0$, m 은 짝수이므로 실수가 아니다.

∴ 실수는 3개

18. $8^x = \sqrt{\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}}$ 을 만족하는 x 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{8}$

③ $\frac{1}{10}$

④ $\frac{1}{12}$

⑤ $\frac{1}{14}$

해설

$$8^x = \sqrt{\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}} \text{에서}$$

$$2^{3x} = \sqrt{\sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{7}}{2}} - \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{7}}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$$

$$3x = \frac{1}{4} \quad \therefore x = \frac{1}{12}$$

19. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{4}$, $c = \sqrt[3]{5}$ 일 때, 세 수 a, b, c 의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a < b < c$

② $c < b < a$

③ $b < c < a$

④ $a < c < b$

⑤ $c < a < b$

해설

$$a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$b = \sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$$

$c = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ 이므로 세 수를 각각 6제곱한다.

$$a^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$$

$$b^6 = (4^{\frac{1}{3}})^6 = 4^2 = 16$$

$$c^6 = (5^{\frac{1}{3}})^6 = 5^2 = 25$$

$8 < 16 < 25$ 이므로 $a < b < c$

20. $p = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right)$

$\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$ 에 대하여 $2 - p = 2^k$ 일 때, 실수 k 의 값은?

① -5

② -16

③ -30

④ -31

⑤ -32

해설

$$p = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right)$$

$\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$ 의 양변에 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ 을 곱하면

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)p$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{32}}$$

$$\frac{1}{2}p = 1 - \frac{1}{2^{32}}, p = 2 - \frac{1}{2^{31}}$$

$$2 - p = \frac{1}{2^{31}} = 2^{-31}$$

$$\therefore k = -31$$

21. $2^x = 3^y = 6^z$ 일 때, $6^{\frac{z}{x} - \frac{z}{y}}$ 의 값은? (단, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$)

① -1

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$2^x = 3^y = 6^z$ 에서

$$2^x = 6^z, (2^x)^{\frac{1}{x}} = (6^z)^{\frac{1}{x}} \quad \therefore 6^{\frac{z}{x}} = 2$$

$$3^y = 6^z, (3^y)^{\frac{1}{y}} = (6^z)^{\frac{1}{y}} \quad \therefore 6^{\frac{z}{y}} = 3$$

$$\therefore 6^{\frac{z}{x} - \frac{z}{y}} = 6^{\frac{z}{x}} \div 6^{\frac{z}{y}} = 2 \div 3 = \frac{2}{3}$$

22. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$ 에 대하여 $f(2\alpha) = 10$, $f(2\beta) = 8$ 일 때,
 $f(\alpha + \beta)f(\alpha - \beta)$ 의 값은?

① 5

② $\frac{9}{2}$

③ $\frac{12}{2}$

④ 9

⑤ 18

해설

$$f(2\alpha) = \frac{1}{2}(3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}) = 10$$

$$\therefore 3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha} = 20$$

$$f(2\beta) = \frac{1}{2}(3^{2\beta} + 3^{-2\beta}) = 8$$

$$\therefore 3^{2\beta} + 3^{-2\beta} = 16$$

$$f(\alpha + \beta)f(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{1}{2}(3^{\alpha+\beta} + 3^{-\alpha-\beta}) \cdot \frac{1}{2}(3^{\alpha-\beta} + 3^{-\alpha+\beta})$$

$$= \frac{1}{4}(3^{2\alpha} + 3^{2\beta} + 3^{-2\beta} + 3^{-2\alpha})$$

$$= \frac{1}{4}(3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha} + 3^{2\beta} + 3^{-2\beta})$$

$$= \frac{1}{4}(20 + 16) = 9$$

23. $0 < a < 1$ 이고 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ 일 때, $\frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}}$ 의 값은?

① $-\sqrt{15}$

② $-\frac{\sqrt{15}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

④ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{15}}{4}$

해설

$$(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + a^{-1} + 2 = 10$$

$$\therefore a + a^{-1} = 8$$

$$(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4 = 64 - 4 = 60$$

$$0 < a < 1 \text{ 이므로 } a - a^{-1} = a - \frac{1}{a} < 0$$

$$\therefore a - a^{-1} = -\sqrt{60} = -2\sqrt{15}$$

$$\therefore \frac{a - a^{-1}}{a + a^{-1}} = -\frac{2\sqrt{15}}{8} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

24. 세 자연수 a, b, c 와 실수 p, q, r, s 에 대하여 $a^p + b^q + c^r = 105^8$, $\frac{1}{p} +$

$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{8}$ 을 만족할 때, $a + b + c$ 의 값은? (단, $a > b > c$)

① 13

② 14

③ 15

④ 16

⑤ 17

해설

$$a^p + b^q + c^r = 105^8 = k \text{라 하면}$$

$$a = k^{\frac{1}{p}} \cdots (\text{㉠})$$

$$b = k^{\frac{1}{q}} \cdots (\text{㉡})$$

$$c = k^{\frac{1}{r}} \cdots (\text{㉢})$$

$$105 = k^{\frac{1}{8}}$$

(㉠) $\times$ (㉡) $\times$ (㉢)을 하면

$$abc = k^{\frac{1}{p}} \times k^{\frac{1}{q}} \times k^{\frac{1}{r}} = k^{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)} = k^{\frac{1}{8}} = 105$$

따라서 $abc = 105 = 3 \times 5 \times 7$ 이고

$a > b > c$ 이므로 $a = 7, b = 5, c = 3$

$$\therefore a + b + c = 15$$

25. 세 자리의 자연수 M 에 대하여 M 의 십의 자리와 일의 자리의 숫자를 서로 바꾼 수를 N 이라 하자. 이때, $(M - N)^{\frac{1}{3}}$ 이 정수가 되는 자연수 M 의 개수는? (단, $M > N$)

① 45

② 54

③ 63

④ 72

⑤ 81

해설

M 의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 a, b, c 라고 하면

$$M = 100a + 10b + c, N = 100a + 10c + b$$

$$\text{이므로 } M - N = 9(b - c) = 3^2(b - c)$$

$(M - N)^{\frac{1}{3}}$ 이 정수가 되려면 $b - c$ 가 $-3, 0, 3$ 이 되어야 한다.

그런데 $M > N$ 에서 $b > c$ 이므로 $b - c = 3$

따라서, b, c 의 순서쌍 (b, c) 는

$(3, 0), (4, 1), (5, 2), \dots, (8, 5), (9, 6)$ 의 7개이고,

a 는 $1 \leq a \leq 9$ 인

자연수이므로 세 자리의 자연수

M 의 개수는 $7 \times 9 = 63$ (개)