

1. $\sqrt[2014]{(-2014)^{2014}} + \sqrt[2015]{(-2015)^{2015}}$ 를 간단히 하면?

① -4017

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 4017

해설

(준식) $= |-2014| + (-2015) = -1$

2. 양의 실수 a 에 대하여 $\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}$ 의 값은?(단, $a \neq 1$)

- ① $\sqrt[5]{a}$ ② $\frac{1}{\sqrt[5]{a}}$ ③ 1 ④ $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ ⑤ $\sqrt[3]{a}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}} &= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}} \\ &= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[15]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[15]{a}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a}} \end{aligned}$$

3. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}$ 를 $4^{\frac{n}{m}}$ 으로 나타낼때, $m+n$ 의 값은? (단, m, n 은 서로소인 자연수)

- ① 21
- ② 22
- ③ 39
- ④ 41
- ⑤ 49

해설

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} &= \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} \div 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \div 2^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}\end{aligned}$$

또한, $2\sqrt[3]{4} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{3}}$ 에서

$$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{3}{18} + \frac{10}{18}} = 2^{\frac{13}{18}} = 4^{\frac{13}{36}} \\ \therefore m &= 36, n = 13 \\ \therefore m+n &= 49\end{aligned}$$

4. $\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[4]{a \sqrt[3]{a^k}}$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

$$a^{\frac{5}{3}} = (a^{\frac{k}{3}+1})^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{k}{12} + \frac{1}{4}$$

$$20 = k + 3$$

$$k = 17$$

5. 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

① $(-100)^0$

② $a^2 \times a \div a^3$

③ $\frac{3^3 \div 3^2}{3}$

④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \frac{1}{a^2 \sqrt{3}}$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \frac{a^3}{a^3 \sqrt{2}}$

해설

① $(-100)^0 = 1$

② $a^2 \times a \div a^3 = a^{2+1-3} = a^0 = 1$

③ $\frac{3^3 \div 3^2}{3} = \frac{3^{3-2}}{3} = \frac{3}{3} = 1$

④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \frac{1}{a^2 \sqrt{3}}$
 $= a^{-\sqrt{3}} \times a^{3\sqrt{3}} \times a^{-2\sqrt{3}}$
 $= a^{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = a^0 = 1$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \frac{a^3}{a^3 \sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}} \times a^3 \div a^{3\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}} = a^{3-2\sqrt{2}}$

6. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7}{a^{-3} + a^{-4} + a^{-5} + a^{-6} + a^{-7} + a^{-8} + a^{-9}}$$

- ① a^8 ② a^9 ③ a^{10} ④ a^{11} ⑤ a^{12}

해설

분자, 분모에 a^{10} 을 곱하면

$$\frac{a^{10} \times (a + a^2 + \cdots + a^7)}{a^7 + a^6 + \cdots + a^2 + a} = a^{10}$$

7. $a = \frac{4}{\sqrt{2}}, b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}}$ 일 때, $\sqrt[6]{24}$ 를 a, b 로 나타낸 것은?

- ① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$ ④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

해설

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, b = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt[6]{24} &= \sqrt[6]{8} \times \sqrt[6]{3} \\ &= \sqrt[3]{2}\sqrt{2} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}} \\ &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

8. 임의의 실수 x 의 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(x)$ 라 할 때, $f(2^{-2}) + f(-2^2) + f(2^0)$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$2^{-2} = \frac{1}{4} > 0$, $-2^2 = -4 < 0$, $2^0 = 1 > 0$ 이고 4는 짝수이므로

$$f(2^{-2}) + f(-2^2) + f(2^0)$$

$$= 2 + 0 + 2$$

$$4$$

9. 서로소인 두 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

따라서 $a + b = 13$ 이다.

10. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}}$ 을 간단히 하면?

- ① $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}}$ ② $\sqrt[8]{\frac{a^3}{b^3}}$ ③ $\sqrt[8]{\frac{b^3}{a^5}}$ ④ $\sqrt[8]{\frac{b^5}{a^3}}$ ⑤ $\sqrt[8]{\frac{a^5}{b^3}}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}} \times \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[8]{\frac{b}{a}} \\ &= \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}} \times \frac{b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}} \\ &= a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}} \times b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}} = a^{-\frac{3}{8}} \times b^{\frac{3}{8}} \\ &= \frac{b^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{3}{8}}} = \frac{\sqrt[8]{b^3}}{\sqrt[8]{a^3}} = \sqrt[8]{\frac{b^3}{a^3}} \end{aligned}$$

11. $2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} &= 2^{\sqrt{2}-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+1} \\ &= 2^{\sqrt{2}-1} \times 2^{-\sqrt{2}-1} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

12. 다음 중 세 수 $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$ 을 작은 수부터 차례로 나열한 것은?

① $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$

② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$

③ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$

④ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$

⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$

해설

거듭제곱의 성질을 이용하여 $\sqrt[12]{N}$ 의 꼴로 나타내면

$$\sqrt[3]{6} = \sqrt[12]{6^4}$$

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[12]{10^3}$$

$$\sqrt[6]{30} = \sqrt[12]{30^2}$$

그런데

$$\frac{6^4}{10^3} = \frac{(2 \times 3)^4}{(2 \times 5)^3} = \frac{2 \times 3^4}{5^3} > 1,$$

$$\frac{10^3}{30^2} = \frac{10}{9} > 1 \text{ 이므로}$$

$$6^4 > 10^3 > 30^2$$

따라서 작은 수부터 나열하면

$$\sqrt[6]{30}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{6}$$

13. 세 수 A, B, C 를
 $A = (10\sqrt{5}$ 의 6제곱근 중 양의 실수)
 $B = (\sqrt{24}$ 의 세제곱근 중 실수),
 $C = (64$ 의 8제곱근 중 양의 실수)
로 정의할 때, 세 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수를 차례로 쓰면?

- ① A, B ② A, C ③ B, A ④ B, C ⑤ C, B

해설

$A = \sqrt[6]{\sqrt{500}} = 500^{\frac{1}{12}},$
 $B = \sqrt[3]{\sqrt{24}} = \left\{ (24)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} = 24^{\frac{1}{6}} = (24^2)^{\frac{1}{12}} = 576^{\frac{1}{12}}$
 $C = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9} = 512^{\frac{1}{12}}$ 이므로
 $A = 500^{\frac{1}{12}}, B = 576^{\frac{1}{12}}, C = 512^{\frac{1}{12}}$
이때, $500 < 512 < 576$ 이므로
 $A < C < B$
따라서 가장 큰 수와 가장 작은 수는 차례로 B, A 이다.

14. $2^x + \frac{1}{2^x} = 2$ 일 때, $8^x + \frac{1}{8^x}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} 8^x + \frac{1}{8^x} &= (2^x)^3 + \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 \\ &= \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x} \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) \\ &= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

15. $\sqrt[3]{a} = 81$, $\sqrt{\sqrt{b}} = 125$ 일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 225

해설

$\sqrt[3]{a} = 81 = 3^4$ 에서 $a = 3^{12}$
 $\sqrt{\sqrt{b}} = 125$, $\sqrt[4]{b} = 5^3 \therefore b = 5^{12}$
이때, $ab = 3^{12} \cdot 5^{12} = 15^{12}$
 $\therefore \sqrt[3]{\sqrt{ab}} = \sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{15^{12}}$
 $= 15^{\frac{12}{6}} = 15^2 = 225$

16. 지진이 발생할 때, 지진의 세기를 진도라 하며 보통 리히터수로 나타낸다. 지질학자 C.F.Richer는 강도가 I 인 지진의 진도 R 을 다음과 같이 정의하였다.

$$R = \log \frac{I}{I_0} \text{ (단, } I_0 \text{는 표준지진의 강도)}$$

리히터수로 진도 6.8인 지진의 강도는 리히터 수로 진도 4.8인 지진의 강도의 몇배인가?

- ① 1.4배
- ② 2배
- ③ $\sqrt{10}$ 배
- ④ 10배
- ⑤ 100배

해설

진도가 4.8, 6.8일 때의 지진의 강도를 각각 I_1 , I_2 라 하면

$$4.8 = \log \frac{I_1}{I_0}, \quad 6.8 = \log \frac{I_2}{I_0} \text{ 이므로}$$

$$\therefore \log \frac{I_2}{I_1} = \frac{10^{6.8}}{10^{4.8}} = 100(\text{배})$$

17. 다음 중 옳은 것은?

① $a > 0$ 이고 $m, n(m > 0, n > 0)$ 이 정수일 때, $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ 이다.

② $a > 0$ 일 때, $(\sqrt[n]{-a})^3 = -a$ 이다.

③ $(-3)^2$ 의 제곱근은 3이다.

④ n 이 짝수일 때, 3의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[3]{3}$ 이다.

⑤ $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a} = \sqrt[m+n]{a}$ (단, $a > 0$)

해설

① $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

③ $(-3)^2$ 의 제곱근은 ± 3 이다.

④ n 이 짝수일 때, 3의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\pm \sqrt[3]{3}$ 이다.

⑤ $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a}$

18. n 이 정수일 때, $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 78

해설

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = (64^{-1})^{\frac{1}{n}} = 64^{-\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$$

$2^{-\frac{6}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n

$n = -1$ 일 때, 2^6

$n = -2$ 일 때, 2^3

$n = -3$ 일 때, 2^2

$n = -6$ 일 때, 2

$$\therefore 2 + 2^2 + 2^3 + 2^6 = 2 + 4 + 8 + 64 = 78$$

19. $\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{1}{11}$ 일 때, $9^x + 9^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{61}{30}$

해설

$$\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{1}{11} = \frac{(3^x - 3^{-x})3^x}{(3^x + 3^{-x})3^x} = \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1} = \frac{9^x - 1}{9^x + 1} = \frac{1}{11}$$

$$11(9^x - 1) = 9^x + 1$$

$$10 \times 9^x = 12$$

$$9^x = \frac{6}{5}$$

$$\therefore 9^x + 9^{-x} = \frac{6}{5} + \frac{5}{6} = \frac{61}{30}$$

20. $a^{8x} = 3 + \sqrt{8}$ 일 때, $\frac{a^x + a^{2x} + a^{3x}}{a^{-x} + a^{-2x} + a^{-3x}} = m + \sqrt{n}$ 을 만족하는 m, n 에 대하여 $100m + n$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$, m 은 유리수, $\sqrt{n}$ 은 무리수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 102

해설

$$\begin{aligned} a^{8x} = 3 + \sqrt{8} \text{에서 } a^{4x} &= \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2+1} \\ \therefore \frac{a^x + a^{2x} + a^{3x}}{a^{-x} + a^{-2x} + a^{-3x}} &= \frac{a^{4x}(a^x + a^{2x} + a^{3x})}{a^{4x}(a^{-x} + a^{-2x} + a^{-3x})} \text{ 따라서 } m = \\ &= \frac{a^{4x}(a^x + a^{2x} + a^{3x})}{a^{4x}(a^x + a^{2x} + a^{3x})} \\ &= a^{4x} \\ &= 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

1, $n = 2$ 이므로
 $\therefore 100m + n = 102$

21. $2^x = 3^y = 5^z$ 이 성립할 때, $5^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{x}{y}} + 3^{\frac{y}{z}}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 5

④ 10

⑤ 20

해설

$2^x = 3^y = 5^z$ 에서

$2 = 5^{\frac{z}{x}}, 3 = 2^{\frac{x}{y}}, 5 = 3^{\frac{y}{z}}$

$\therefore 5^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{x}{y}} + 3^{\frac{y}{z}} = 2 + 3 + 5 = 10$

22. 네 수 $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt{\sqrt[3]{10}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{11}}$ 중에서 서로 다른 세 수를 택하여 이들이 각각 세 모서리의 길이가 되는 직육면체를 만들려고 한다. 이와 같은 방법으로 만든 직육면체의 부피의 최솟값은?

- ① $\sqrt[12]{460}$
- ② $\sqrt[12]{680}$
- ③ $\sqrt[12]{880}$
- ④ $\sqrt[6]{680}$
- ⑤ $\sqrt[6]{880}$

해설

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[12]{(2\sqrt{2})^4} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{100}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{11}} = \sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{11^2} = \sqrt[12]{121}$$

$$\therefore \sqrt[3]{2\sqrt{2}} < \sqrt{\sqrt[3]{10}} < \sqrt[3]{\sqrt{11}} < \sqrt[4]{5}$$

그러므로 세 모서리의 길이가 $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{10}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{11}}$ 일 때, 직육면체의 부피가 최소이다.

따라서 구하는 부피의 최솟값은

$$\sqrt[12]{8^2 \times 10^2 \times 11^2} = \sqrt[6]{8 \times 10 \times 11} = \sqrt[6]{880}$$

23. 다음은 정수 m, n 에 대하여 성립하는 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n} (a > 0)$ 을 유리수 지수로 확장할 수 있음을 증명한 것이다.

증명

m, n 을 유리수라 하면 정수 $p, q, r, s (p > 0, r > 0)$ 에 대하여 $m = \frac{q}{p}, n = \frac{s}{r}$ 로 나타낼 수 있다.
이때,
$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{\frac{q}{p}} a^{\frac{s}{r}} = \sqrt[p]{a^{qr}} \sqrt[r]{a^{ps}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr} a^{ps}} = \sqrt[p]{a^{(qr+ps)}} \\ a &= \frac{q}{p} + \frac{s}{r} = a^{m+n} \end{aligned}$$

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① (가) : pr , (나) : $qr + ps$
- ② (가) : pr , (나) : $pq + rs$
- ③ (가) : qs , (나) : $qr + ps$
- ④ (가) : qs , (나) : $pq + rs$
- ⑤ (가) : pq , (나) : $pq + rs$

해설

m, n 이 유리수라 하면 정수 $p, q, s (p > 0, r > 0)$ 에 대하여 $m = \frac{q}{p}, n = \frac{s}{r}$ 로 나타낼 수 있다.
이때,
$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{\frac{q}{p}} a^{\frac{s}{r}} = a^{\frac{qr}{pr}} a^{\frac{ps}{pr}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr}} \cdot \sqrt[p]{a^{ps}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr} \cdot a^{ps}} \\ &= \sqrt[p]{a^{qr+ps}} \\ &= a^{\frac{qr+ps}{pr}} = a^{\frac{q}{p} + \frac{s}{r}} = a^{m+n} \end{aligned}$$

따라서, (가) : pr , (나) : $qr + ps$

24. $A = \left\{ x \mid x = \left\{ \frac{2^{11}(3^4 + 3^2 + 1)}{3^6 - 1} \right\}^{\frac{1}{2n}}, n \text{과 } x \text{는 양의 정수} \right\}$ 의 모든 원소들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$$\begin{aligned} x &= \left\{ \frac{2^{11}(3^4 + 3^2 + 1)}{(3^2 - 1)(3^4 + 3^2 + 1)} \right\}^{\frac{1}{2n}} \\ &= \left(\frac{2^{11}}{3^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2n}} = 2^{\frac{4}{n}} \end{aligned}$$

양의 정수 n 에 대하여 x 가 자연수가 되기 위한 n 은 1, 2, 4이다.
따라서, $A = \{2, 4, 16\}$
그러므로 집합 A 의 원소의 합은 22이다.

25. $x = 2^{\frac{3}{4}} - 2^{-\frac{3}{4}}$ 일 때, $x^4 + 4x^2$ 의 값은?

- ① $\frac{47}{8}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ $\frac{51}{8}$ ④ $\frac{53}{8}$ ⑤ $\frac{55}{8}$

해설

$$\begin{aligned}x^2 &= (2^{\frac{3}{4}} - 2^{-\frac{3}{4}})^2 \\x^2 &= 2^{\frac{3}{2}} - 2 + 2^{-\frac{3}{2}} \\x^4 &= (2^{\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}})^2 - 4(2^{\frac{3}{2}} - 2^{-\frac{3}{2}}) + 4 \\x^4 + 4(2^{\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}}) &= (2^{\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}})^2 + 4 \\2^{\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}} &= x^2 + 2 \text{ 이므로} \\x^4 + 4(x^2 + 2) &= 2^3 + 2^{-3} + 2 + 4 \\x^4 + 4x^2 &= 8 + 2 + \frac{1}{8} + 4 - 8 \\&= \frac{49}{8}\end{aligned}$$