1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[3]{-64} = -4$

② $\sqrt[4]{81} = 3$

③ $\sqrt[5]{-32} = -2$

④ $-\sqrt[3]{0.008} = -0.2$

⑤ $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = 1$

해설

⑤ $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2})$

$= \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[3]{2^3} = 5$

2. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=2^{p}\cdot 3^{q}$ 일 때, $p+q$의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$$\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

$$=\sqrt[3]{3^{3}\cdot 3}+\sqrt[3]{2^{3}\cdot 3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot 3}$$

$$=3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$$

$$=\left(3+2+\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3}$$

$$=\frac{16}{3}\sqrt[3]{3}=2^{4}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore p=4,\ q=-\frac{2}{3}\qquad \therefore p+q=\frac{10}{3}$$

3. $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{6} = 2^a \times 3^b$ 일 때 $a+b$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

해설

$2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{1}{4}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{6}}$

$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$

$= 2^{\frac{7}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}}$

$a = \frac{7}{6},\ b = \frac{1}{2}$

$\therefore a+b = \frac{7+3}{6} = \frac{5}{3}$

4. $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}}$을 $\sqrt{2^k}$의 꼴로 나타낼 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{11}{12}$ ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$을 이용하여 주어진 수를 변형하고 지수법칙으로 계산한다.

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}} = (2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$$
$$= (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$$
$$= 2^{\frac{5}{4} \times \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{12}}$$

$2^{\frac{5}{12}} = (2^{\frac{1}{2}})^k$이므로 $\frac{5}{12} = \frac{1}{2}k$

$\therefore\ k = \frac{5}{6}$

5. $a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{3}} \div a^{\frac{3}{2}}$ 을 간단히 하면?

① $a\sqrt[3]{a}$ ② $a\sqrt{a}$ ③ $\dfrac{1}{a\sqrt[3]{a^2}}$

④ $\dfrac{1}{a\sqrt{a}}$ ⑤ $\dfrac{1}{a\sqrt[3]{a}}$

해설

$a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}} = a^{\frac{3-2-9}{6}}$

$= a^{\frac{-8}{6}} = a^{\frac{-4}{3}} = \dfrac{1}{a\sqrt[3]{a}}$

6. $\left(\dfrac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{9}$　　② $\dfrac{1}{3}$　　③ 1　　④ 3　　⑤ 9

해설

$$\left(\frac{9^{\sqrt{2}}}{27}\right)^{2\sqrt{2}+3} = \left(\frac{3^{2\sqrt{2}}}{3^3}\right)^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= (3^{2\sqrt{2}-3})^{2\sqrt{2}+3}$$

$$= 3^{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}$$

$$= 3^{8-9} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

7. $x = 2$ 일 때, $(x^x)^{x^x}$ 는?

① 16　② 64　③ 256

④ 1024　⑤ 65536

해설

$(2^2)^{2^2} = (2^2)^4 = 2^{16}$

$2^{10} = 1024,\ 2^6 = 64$ 이므로

$\therefore\ 2^{16} = 1024 \times 64 = 65536$

8. $3^x = 5$ 일 때, $(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}}$ 의 값을 구하면?

① 3 ② $\sqrt{3}$ ③ 5 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{4}} = 3^x = 5$

9. 다음 명제 중 옳은 것을 모두 고르면?

① -1의 세제곱근 중 허수는 한 개뿐이다.

② $-\sqrt{3}$의 세제곱근 중 실수는 $-\sqrt[3]{3}$이다.

③ $\sqrt{2}$의 네제곱근 중 실수는 $-\sqrt[8]{2}$와 $\sqrt[8]{2}$뿐이다.

④ -10의 n제곱근(n은 홀수) 중 실수인 것은 한 개뿐이다.

⑤ $(\sqrt[3]{-3})^9 = -\sqrt[3]{3}$

해설

① -1의 세제곱근 중 실수 1개와 허수2개가 있다. (거짓)

② $-\sqrt{3}$의 세제곱근 중 실수는 $-\sqrt[3]{\sqrt{3}}$이다. (거짓)
③ n이 홀수일 때, -10의 n제곱근 중 실수인 것은$\sqrt[n]{-10}$, 즉 한개이다. (참)

⑤ $(\sqrt[3]{-3})^9 = \left\{(\sqrt[3]{-3})^3\right\}^3 = (-3)^3 = -27$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

10. $a>0$이고 $m,\ n,\ p$가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

② $\sqrt[2p]{a^{mp}}=\sqrt{a^{m}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^{m}\cdot(\sqrt[m]{a})^{n}=\sqrt{a^{mn}}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}}=a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$$(\sqrt[n]{a})^{m}\cdot(\sqrt[m]{a})^{n}=a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}}=a^{\frac{m^2+n^2}{mn}}$$

11. $\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}}\cdot\sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$ 의 값은?

① 20 ② $\sqrt{401}$ ③ $\sqrt{402}$ ④ $\sqrt[4]{401}$ ⑤ $\sqrt[4]{402}$

해설

$$\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}}\cdot\sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$$
$$=\sqrt[4]{(\sqrt{401}+1)^2}\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{401}-1)^2}$$
$$=\sqrt{\sqrt{401}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{401}-1}=\sqrt{401-1}=20$$

12. $\dfrac{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{6}}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ③ $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ ④ $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}}$ ⑤ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{6}} &= \frac{\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}+\sqrt[3]{3\cdot 2}} \\ &= \frac{2+\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{2+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}(2+\sqrt[3]{3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{aligned}$$

13. 양의 실수 a에 대하여 $\sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}}} \times \dfrac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \sqrt[8]{a^n}$ 이 성립할 때 , 자연수 n의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 16

해설

$$\sqrt{\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}} = \frac{\sqrt{\sqrt[6]{a^7}}}{\sqrt{\sqrt[4]{a}}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}}$$
$$= \frac{\sqrt[12]{a^7}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}}$$
$$= \frac{\sqrt[12]{a^7}}{\sqrt[12]{a}} = \sqrt[12]{\frac{a^7}{a}}$$
$$= \sqrt[12]{a^6} = \sqrt{a} = \sqrt[8]{a^4}$$

$\therefore n = 4$

14. 세 수 $A = \sqrt[3]{4},\ B = \sqrt[4]{6},\ C = \sqrt[6]{13}$의 대소를 비교하면?

① $A > B > C$　② $B > A > C$　③ $C > B > A$
④ $A > C > B$　⑤ $B > C > A$

해설

$A = \sqrt[3]{4},\ B = \sqrt[4]{6},\ C = \sqrt[6]{13}$을 거듭 제곱꼴로 고쳤을 때, 밑과 지수가 모두 다르므로
지수를 통일한 다음 밑이 큰 순서로 대소를 비교한다.
$3, 4, 6$의 최소공배수가 12이므로
$A = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$
$B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$
$C = \sqrt[6]{13} = \sqrt[12]{13^2} = \sqrt[12]{169}$
$\therefore A > B > C$

15. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{-3}{n}}$ 이 자연수

$n = -1$일때, 3^3

$n = -3$일때, 3

$\Rightarrow$ 2개

16. $x+x^{-1}=3$ 일 때, $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ 5 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$x+x^{-1}=3$ 이므로

$(x+x^{-1})^3=27$

$x^3+x^{-3}+3(x+x^{-1})=27$

$x^3+x^{-3}=27-3\cdot 3=18$

$(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}})^2=x^3+x^{-3}+2=20$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=2\sqrt{5}\ (\because\ x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}>0)$

17. $2^x - 2^{-x} = 2\sqrt{3}$일 때, $4^x - 4^{-x}$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $12\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} 4^x - 4^{-x} &= (2^x)^2 - (2^{-x})^2 \\ &= (2^x + 2^{-x})(2^x - 2^{-x}) \\ &= 2\sqrt{3}(2^x + 2^{-x}) \end{aligned}$$

한편, $(2^x + 2^{-x})^2 = (2^x - 2^{-x})^2 + 4$
$= (2\sqrt{3})^2 + 4 = 16$

$2^x + 2^{-x} > 0$ 이므로 $2^x + 2^{-x} = 4$

$\therefore 4^x - 4^{-4x} = 2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$

18. $\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}\times\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}\times\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$=\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}\times\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

19. $\sqrt[4]{4+\sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$ 을 간단히 하면?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 4

해설

$$\sqrt[4]{4+\sqrt{15}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$

$$= \sqrt{\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} \times \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{8}$$

$$= \frac{\sqrt{5-3}}{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[4]{8} = \sqrt{2} \times \sqrt[4]{\frac{8}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

20. 세 수 $\sqrt{5}, \sqrt[3]{11}, \sqrt[6]{128}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{5} < \sqrt[3]{11} < \sqrt[6]{128}$

② $\sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < \sqrt[6]{128}$

③ $\sqrt{5} < \sqrt[6]{128} < \sqrt[3]{11}$

④ $\sqrt[6]{128} < \sqrt[3]{11} < \sqrt{5}$

⑤ $\sqrt[6]{128} < \sqrt{5} < \sqrt[3]{11}$

해설

$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{11} = 11^{\frac{1}{3}}, \sqrt[6]{128} = 128^{\frac{1}{6}}$

이 때, 지수의 분모를 같게 만들면

$5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}}, 11^{\frac{1}{3}} = 11^{\frac{2}{6}}, 128^{\frac{1}{6}}$

지수의 분모가 6으로 모두 같으므로

$5^3, 11^2, 128$ 의 대소를 비교한다.

$5^3 = 125, 11^2 = 121, 128$ 에서

$11^2 < 5^3 < 128 \therefore \sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < \sqrt[6]{128}$

21. $2^x = \sqrt{3} + 2$일 때, $\dfrac{4^x + 4^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{14}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{3}}{12}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{3}}{14}$ ⑤ $\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$

해설

$$4^x = (2^x)^2 = (\sqrt{3} + 2)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$4^{-x} = \frac{1}{4^x} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{(7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})} = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$\frac{4^x + 4^{-x}}{4^x - 4^{-x}} = \frac{(7 + 4\sqrt{3}) + (7 - 4\sqrt{3})}{(7 + 4\sqrt{3}) - (7 - 4\sqrt{3})} = \frac{14}{8\sqrt{3}} = \frac{7}{4\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$$

22. $x^a = y^b = xy$ 인 관계가 성립할 때, $\dfrac{3(a+b)}{ab}$ 의 값을 구하여라. (단, x, y는 1이 아닌 양수, $xy \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x = (xy)^{\frac{1}{a}}, y = (xy)^{\frac{1}{b}}$

$xy = (xy)^{\frac{1}{a}}(xy)^{\frac{1}{b}} = (xy)^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ 이므로 $\dfrac{3(a+b)}{ab} = 3$

23. $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ 일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=2$

㉡ $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=2\sqrt{2}$

㉢ $(2^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})(2+ab)(2^2+a^2b^2)(2^4+a^4b^4)(2^8+a^8b^8)=\dfrac{1}{b}(2^{16}-1)$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

㉠$(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$(참)

㉡ $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{a(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})+b(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a+b=2\sqrt{2}$

㉢ $ab=1$이므로

$(ab)^{\frac{1}{2}}=ab=(ab)^2=(ab)^4=(ab)^8=1$

$(2^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})(2+ab)(2^2+a^2b^2)(2^4+a^4b^4)(2^8+a^8b^8)=(2^{\frac{1}{2}}+1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$(2^{\frac{1}{2}}+1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)=A$라 하면

$bA=(2^{\frac{1}{2}}-1)A$

$=(2^{\frac{1}{2}}-1)(2^{\frac{1}{2}}+1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=2^{16}-1$

$\therefore A=\dfrac{1}{b}(2^{16}-1)$(참)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

24. 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여 $p=\frac{1}{a-b}$, $q=\frac{1}{b-c}$, $r=\frac{1}{c-a}$이라 하자. 이때, $(x^p)^q\cdot(x^q)^r\cdot(x^r)^p$의 값을 구하여라. (단, $x>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(x^p)^q\cdot(x^q)^r\cdot(x^r)^p=x^{pq+pr+rp}$

$pq+qr+rp$

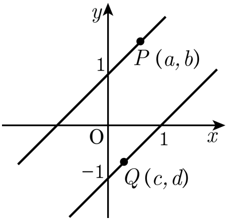
$$=\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

$$=\frac{(a-b)+(b-c)+(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$$

$\therefore\ (x^p)^q\cdot(x^q)^r\cdot(x^r)^p=x^{pq+qr+rp}=x^0=1$

25. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 P$(a,\ b)$, Q$(c,\ d)$가 각각 두 직선 $m,\ n$ 위를 움직인다.

$2^b = 12 \cdot 2^d$이 성립할 때, $\dfrac{2^a + 2^b}{2^c + 2^d}$의 값은?



① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

두 직선 $m,\ n$의 방정식은 각각 $y = x + 1,\ y = x - 1$이므로

$b = a + 1,\ d = c - 1$

또, $2^b = 12 \cdot 2^d$에서 $2^{b-d} = 2^{a-c+2} = 4 \cdot a^{a-c} = 12$

$\therefore\ 2^{a-c} = 3$

따라서, $2^a + 2^b = 2^a + 2^{a+1} = 3 \cdot 2^a$

$2^c + 2^d = 2^c + 2^{c-1} = \dfrac{3}{2} \cdot 2^c$이므로

$$\frac{2^a + 2^b}{2^c + 2^d} = \frac{3 \cdot 2^a}{\frac{3}{2} \cdot 2^c} = 2 \cdot 2^{a-c} = 2 \cdot 3 = 6$$