1. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt[3]{-0.027} = -3$ ② $\sqrt{\sqrt[3]{81}} = 3$

③ $(\sqrt[6]{9})^3 = 3$ ④ $\sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{81} = 3$

⑤ $\sqrt[4]{81} \div \sqrt[4]{27} = 3$

해설

① 0.3

② $3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$

③ $\left\{(3^2)^{\frac{1}{6}}\right\}^3 = 3^{2\times\frac{1}{6}\times3} = 3$

④ $3^{\frac{2}{5}+\frac{4}{5}} = 3^{\frac{6}{5}}$

⑤ $3^1 \div 3^{\frac{3}{4}} = 3^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

2. $a > 0$일 때, $\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3}$을 간단히 하면?

① 2 ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt[4]{a^3}$ ④ $\sqrt[4]{a^3}$ ⑤ $\sqrt[4]{4a^3}$

해설

$$\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} = \left(2^4 a^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}} = 2a^{\frac{3}{8}-\frac{3}{8}} = 2a^0 = 2$$

3. 16의 네제곱근 중 실수인 것의 곱을 P, 27의 세제곱근 중 허수인 것의 합을
Q라 할 때, $P \times Q$의 값은?

① -36 ② -12 ③ 4 ④ 12 ⑤ 36

해설

$x^4 = 16, x^3 = -27$을 만족하는 x를 구한다.
16의 네제곱근 중 실수인 것은
$\sqrt[4]{16} = 2, -\sqrt[4]{16} = -2$
$\therefore P = -4$
-27의 세제곱근을 X라 하면
$x^3 = -27, (x+3)+(x^2-3x+9) = 0$
이때, -27의 세제곱근 중 허수인 것의 합은 방정식 $x^2-3x+9 = 0$의 두근의 합과 같다.
$\therefore Q = 3$
$\therefore P \times Q = -12$

4. 16의 네제곱근 중 음수인 것을 a, -27의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, ab의 값은?

① -12 ② -6 ③ 6 ④ 12 ⑤ 36

해설

16의 네제곱근 중 음수인 것은
$-\sqrt[4]{16}=-2 \quad \therefore \ a=-2$
-27의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=-27, \quad (x+3)(x^2-3x+9)=0$
이때, -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.
$\therefore \ b=-3$
$\therefore ab=(-2)\times(-3)=6$

5. $x > 0,\ x \neq 1$ 일 때, $\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[8]{x^k}$ 을 만족하는 자연수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$

6. $\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{2^4}}{\sqrt[3]{5}}} \times \sqrt[9]{\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2^6}}}$ 를 간단히 하여 $\sqrt[n]{4}$ 로 나타낼 때, 자연수 n 의 값은?

① 4　　② 6　　③ 9　　④ 12　　⑤ 18

해설

$$\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2^4}}{\sqrt[3]{5}}} \times \sqrt[9]{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2^6}}} = \frac{\sqrt[6]{\sqrt{2^4}}}{\sqrt[6]{\sqrt[3]{5}}} \times \frac{\sqrt[9]{\sqrt{5}}}{\sqrt[9]{\sqrt[3]{2^6}}}$$

$$= \frac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[18]{5}} \times \frac{\sqrt[18]{5}}{\sqrt[27]{2^6}}$$

$$= \frac{\sqrt[3\times4]{2^4}}{\sqrt[9\times3]{2^{3\times2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[9]{2^3}}{\sqrt[9]{2^2}} = \sqrt[9]{\frac{2^3}{2^2}}$$

$$= \sqrt[9]{2} = \sqrt[18]{4}$$

$\therefore n = 18$

7. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k의 값을 구하여라.(단. $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$ 이므로
$k = 5$

8. $(3-\sqrt{2})^{-1}\times(11+6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}=a$ 일 때, $\frac{1}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$a=\frac{1}{3-\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}$

$=\frac{1}{(3-\sqrt{2})\times(3+\sqrt{2})}=\frac{1}{7}$

$\therefore\frac{1}{a}=\frac{1}{7}$

9. $P=\dfrac{9^3\cdot 81^{-3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6}\cdot 9^2}$ 에 대하여 $\sqrt[4]{P}$ 의 값은?

① $3\sqrt[4]{9}$ ② $9\sqrt[4]{3}$ ③ $9\sqrt[4]{9}$ ④ $9\sqrt[4]{27}$ ⑤ 81

해설

$$P=\frac{9^3\cdot 81^{-3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6}\cdot 9^2}=\frac{(3^2)^3\cdot(3^4)^{-3}\cdot 3^3}{(3^3)^{-6}\cdot(3^2)^2}$$

$$=\frac{3^6\cdot 3^{-12}\cdot 3^3}{3^{-18}\cdot 3^4}$$

$$=\frac{3^{-3}}{3^{-14}}$$

$$=3^{-3-(-14)}=3^{11}$$

$$\therefore\ \sqrt[4]{P}=\sqrt[4]{3^{11}}=9\sqrt[4]{3^3}=9\sqrt[4]{27}$$

10. $10^{0.31}=2$, $10^{1.04}=11$로 계산할 때, $10^{a}=275$를 만족하는 a의 값은?

① 2.34 ② 2.38 ③ 2.42 ④ 2.46 ⑤ 2.50

해설

$5=\frac{10}{2}=\frac{10}{10^{0.31}}=10^{1-0.31}=10^{0.69}$이므로

$275=5^2\times11=(10^{0.69})^2\times10^{1.04}$

$=10^{1.38}\times10^{1.04}=10^{2.42}$

$\therefore\ a=2.42$

11. $x-y=2,\ 2^x+2^{-y}=5$ 일 때, 8^x+8^{-y} 의 값은?

① 61　② 62　③ 63　④ 64　⑤ 65

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{주어진식}) &= 2^{3x}+2^{-3y} \\
&= (2^x+2^{-y})^3-3\cdot 2^x2^{-y}(2^x+2^{-y}) \\
&= 5^3-3\cdot 4\cdot 5=65
\end{aligned}
$$

12. $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = 2$ 일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

$x^3 + x^{-3}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2$

$x - 2 + x^{-1} = 4$

$x + x^{-1} = 6$

$(x + x^{-1})^3 = x^3 + 3(x + x^{-1}) + x^{-3} = 216$

$x^3 + x^{-3} = 216 - 18 = 198$

13. $x > 0$ 이고 $x^2 + x^{-2} = 7$ 일 때, $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1})$ 의 값은?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

해설

곱셈 공식을 써서 식을 변형한다.

$x^2 + x^{-2} = 7$

$(x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2$ 에서

$(x + x^{-1})^2 = 7 + 2 = 9$

$x + x^{-1} > 0$ 이므로 $x + x^{-1} = 3$

$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} + 2$ 에서

$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 3 + 2 = 5$

$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0$ 이므로 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

$\therefore (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1}) = 3\sqrt{5}$

14. $\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$일 때, $\dfrac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}}$의 값은?(단, $a > 0$)

① $\dfrac{3}{2}$　　② $\dfrac{4}{3}$　　③ $\dfrac{5}{4}$　　④ $\dfrac{6}{5}$　　⑤ $\dfrac{7}{6}$

해설

$\dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 2$에서 $a^x + a^{-x} = 2(a^x - a^{-x})$이므로

$a^x = 3a^{-x} \quad \therefore \ a^{2x} = 3$

$$\therefore \ \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^{2x} - a^{-2x}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{4}$$

15. 실수 x, y에 대하여 $57^x = 27$, $513^y = 81$일 때, $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$57^x = 27 = 3^3$에서 $57 = (3^3)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \cdots$ ㉠

$513^y = 81 = 3^4$에서 $513 = (3^4)^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}} \cdots$ ㉡

㉠ ÷ ㉡을 하면

$\frac{1}{9} = 3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{4}{y}} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$

$3^{-2} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$

$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2$

16. $11^x = 25,\ 275^y = 125$ 일 때, $\frac{2}{x} - \frac{3}{y}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(11^x)^{\frac{1}{x}} = (25)^{\frac{1}{x}}$ 에서 $5^{\frac{2}{x}} = 11$

$(275^y)^{\frac{1}{y}} = (5^3)^{\frac{1}{y}}$ 에서 $5^{\frac{3}{y}} = 275$ 이므로

$5^{\frac{2}{x}} \div 5^{\frac{3}{y}} = 11 \div 275 = \frac{1}{25}$

$5^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}} = 5^{-2},\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -2$

17. 어떤 도형이 그려진 종이를 복사기로 확대 복사를 한 후 출력된 복사본으로 같은 배율의 확대 복사본을 또 만든다. 이와 같은 작업을 계속해 나갔더니 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 2배가 되었다. 7회째 복사본에서 도형의 넓이는 4회째 복사본에서 도형의 넓이의 몇 배인가?

① $\sqrt[7]{8}$ ② $\sqrt[5]{8}$ ③ $\sqrt[3]{8}$ ④ $\sqrt[5]{4}$ ⑤ $\sqrt[3]{4}$

해설

처음 도형의 넓이를 A, 확대 배율을 a로 놓으면 5회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^5$ 이므로

$A \cdot a^5 = 2A$ 에서 $a^5 = 2 \quad \therefore \ a = \sqrt[5]{2}$

7회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^7$

4회째 복사본에서 도형의 넓이는 $A \cdot a^4$ 이므로

$$\frac{A \cdot a^7}{A \cdot a^4} = a^3 = (\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{8}$$

18. 16의 세제곱근 중 실수인 것을 a, -2의 세제곱근 중에 실수인 것을 b라 할 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

① $\sqrt[3]{3}$　　② -2　　③ 3　　④ $-\sqrt[3]{4}$　　⑤ 8

해설

16의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{16}$이므로

$a = \sqrt[3]{16}$

-2의 세제곱근 중에 실수인 것은 $-\sqrt[3]{2}$이므로

$b = -\sqrt[3]{2}$

따라서, 구하는 값은

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{\frac{16}{2}} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{2^3} = -2$$

19. $a^{3x} - a^{-3x} = 6\sqrt{3}$(단, $a > 0$) 일 때, $a^{x} - a^{-x} = m$ 이고 $a^{2x} - a^{-2x} = n$ 이다. 이때, $m^2 + n^2$ 의 값은?

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

해설

$a^{3x} - a^{-3x} = (a^{x} - a^{-x})^3 + 3(a^{x} - a^{-x}) = 6\sqrt{3}$ 에서

$m^3 + 3m - 6\sqrt{3} = 0$

$(m - \sqrt{3})(m^2 + \sqrt{3}m + 6) = 0$

$\therefore\ m = \sqrt{3}$

또, $(a^{x} + a^{-x})^2 = (a^{x} - a^{-x})^2 + 4 = (\sqrt{3})^2 + 4 = 7$ 에서

$a^{x} + a^{-x} = \sqrt{7}$

따라서 $n = a^{2x} - a^{-2x} = (a^{x} + a^{-x})(a^{x} - a^{-x})$

$= \sqrt{7} \times \sqrt{3} = \sqrt{21}$

$\therefore\ m^2 + n^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{21}^2 = 24$

20. 함수 $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ (단, $a \neq 1$ 인 양수)에 대하여 $f(\alpha) = \dfrac{1}{3}$, $f(\beta) = \dfrac{1}{2}$ 일 때, $f(\alpha+\beta)$ 의 값은?

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{4}{5}$ ④ $\dfrac{5}{7}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

해설

$f(\alpha) = \dfrac{a^\alpha - a^{-\alpha}}{a^\alpha + a^{-\alpha}} = \dfrac{1}{3}$

$3a^\alpha - 3a^{-\alpha} = a^\alpha + a^{-\alpha}$

$\therefore a^\alpha = 2a^{-\alpha}$

또, $f(\beta) = \dfrac{a^\beta - a^{-\beta}}{a^\beta + a^{-\beta}} = \dfrac{1}{2}$

$2a^\beta - 2a^{-\beta} = a^\beta + a^{-\beta} \therefore a^\beta = 3a^{-\beta}$

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta) &= \frac{a^{\alpha+\beta} - a^{-\alpha-\beta}}{a^{\alpha+\beta} + a^{-\alpha-\beta}} \\ &= \frac{a^\alpha a^\beta - a^{-\alpha}a^{-\beta}}{a^\alpha a^\beta + a^{-\alpha}a^{-\beta}} \\ &= \frac{6a^{-\alpha}a^{-\beta} - a^{-\alpha}a^{-\beta}}{6a^{-\alpha}a^{-\beta} + \alpha^{-\alpha}a^{-\beta}} \\ &= \frac{5a^{-\alpha}a^{-\beta}}{7a^{-\alpha}a^{-\beta}} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

21. $60^a = 3,\ 60^b = 5$ 일 때, $12^{\frac{(1-a-b)}{2(1-b)}}$ 는?

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{12}$

해설

$60^a = 3,\ 60^b = 5$ 에서 두 식을 곱하면 $60^{a+b} = 15$

$\frac{60}{60^{a+b}} = \frac{60}{15}$ 이므로 $60^{1-a-b} = 4 \cdots$ ㉠

$60^b = 5$에서 $\frac{60}{60^b} = \frac{60}{5}$ 이므로 $60^{1-b} = 12 \cdots$ ㉡

㉡에서 $12 = 60^{1-b},\ 12^{\frac{1}{1-b}} = 60,\ (12^{\frac{1}{1-b}})^{1-a-b} = 60^{1-a-b}$

㉠에 의해 $12^{\frac{1-a-b}{1-b}} = 4,\ (12^{\frac{1-a-b}{1-b}})^{\frac{1}{2}} = 12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} = 4^{\frac{1}{2}}$

$\therefore 12^{\frac{(1a-b)}{2(1-b)}} = 2$

22. 집합 $A=\left\{(x,\ y)\mid y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x,\ y \text{ 는 실수}\right\}$에 대하여 $(a,\ b)\in A$일 때, 보기에서 집합 A의 원소를 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2a,\ b^2)$　　㉡ $\left(a-2,\ \frac{b}{4}\right)$　　㉢ $\left(\frac{a}{3},\ \sqrt[3]{b}\right)$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $(a,b)\in A$에서 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^a$이므로

$b^2=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^a\right\}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2a}$

$\therefore (2a,\ b^2)\in A$

㉡. $b=\left(\frac{1}{2}\right)^a$에서

$\frac{b}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^a=\left(\frac{1}{2}\right)^{a+2}\neq\left(\frac{1}{2}\right)^{a-2}$

$\therefore \left(a-2,\ \frac{b}{4}\right)\notin A$

㉢. $(a,\ b)\in A$에서 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^a$이므로

$\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^a}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^a\right\}^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a}{3}}$　$\therefore \left(\frac{a}{3},\ \sqrt[3]{b}\right)\in A$

따라서 집합 A의 원소인 것은 ㉠, ㉢이다.

23. 자연수 n에 대하여 $\sqrt[4]{n}$의 정수 부분을 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(k)$의 값이 200 이상이 되도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 99　　② 100　　③ 108　　④ 109　　⑤ 110

해설

(i) $1 \le n < 16$일 때,

$1^4 \le n < 2^4$이므로 $1 \le \sqrt[4]{n} < 2$

$\therefore f(n) = 1$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15) = 15$

(ii) $16 \le n < 81$일 때,

$2^4 \le n < 3^4$이므로 $2 \le \sqrt[4]{n} < 3$

$\therefore f(n) = 2$

$\therefore f(16)+f(17)+f(18)+\cdots+f(80)$

$= 2 \times 65 = 130$

(iii) $3^4 \le n < 4^4$일 때,

$3 \le \sqrt[4]{n} < 4$이므로 $f(n) = 3$

(i),(ii),(iii)에서 $f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(k)$ 중에서

$f(n) = 3$인 자연수의 개수를 p라 하면

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(k)$

$= 15 + 130 + 3 \times p = 145 + 3p$

$145 + 3p \ge 200 \ \therefore p \ge \dfrac{55}{3} = 18.\times\times$

따라서 조건을 만족하는 자연수 k 의 최솟값은 $80 + 19 = 99$

24. 다음 중 대소 관계가 옳은 것은?

① $3^{55} < 4^{44} < 5^{33}$　② $3^{55} < 5^{33} < 4^{44}$

③ $4^{44} < 3^{55} < 5^{33}$　④ $5^{33} < 4^{44} < 3^{55}$

⑤ $5^{33} < 3^{55} < 4^{44}$

해설

$3^{55} = (3^5)^{11}$
$4^{44} = (4^4)^{11}$
$5^{33} = (5^3)^{11}$
$3^5 = 243,\ 4^4 = 256,\ 5^3 = 125$
이므로 $(5^3)^{11} < (3^5)^{11} < (4^4)^{11}$

25. a, b, c가 서로 다른 실수일 때, 다음을 간단히 하면?

$$\left(3^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{a}{c-a}}\left(3^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{b}{a-b}}\left(3^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{c}{b-c}}$$

① 3　② 9　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{9}$　⑤ $\frac{1}{27}$

해설

지수를 따로 써보면

$$\frac{a^2}{(a-b)(c-a)}+\frac{b^2}{(b-c)(a-b)}+\frac{c^2}{(c-a)(a-c)}$$

$$\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)-(b^2-c^2)a+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(b-c)\left\{a^2-(b+c)a+bc\right\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=-1$$

$$\therefore 3^{-1}=\frac{1}{3}$$