1. 다음 (　　) 안에 알맞은 것은?

$\frac{3}{2}i,\ \frac{5}{4}i,\ (\quad),\ \frac{9}{8}i,\ \frac{11}{10}i,\ \cdots$

① $\frac{5}{4}i$　② i　③ $\frac{7}{6}i$　④ $\frac{8}{6}i$　⑤ $\frac{6}{7}i$

해설

나열된 복소수의 분모의 수열을 a_n이라 하면 $a_n = 2n$
분자의 수열을 b_n이라 하면 $b_n = (2n+1)i$이다.
따라서 구하는 세 번째의 복소수는 $\frac{7}{6}i$이다.

2. a, -6, b, -12가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

b는 -6과 -12의 등차중항이므로

$b = \frac{-6 + (-12)}{2} = -9$

따라서 이 수열은 공차가 -3인 등차수열이다.

$a + (-3) = -6$에서 $a = -3$

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-9}{-3} = 3$

3. 첫째항이 -43, 공차가 7인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 8항　② 제 9항　③ 제 10항
④ 제 11항　⑤ 제 12항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면
$a_n = -43 + (n-1) \times 7 = 7n - 50$
이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은
$7n - 50 > 0,\ 7n > 50$
$\therefore\ n > \dfrac{50}{7} = 7.14\cdots$
따라서 자연수 n의 최솟값은 8이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

4. 조화수열 12, 6, 4, 3, $\cdots$ 의 일반항은?

① $\frac{12}{n}$ ② $\frac{8}{n}$ ③ $\frac{6}{n}$ ④ $\frac{3}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이다.

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \cdots$

$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \cdots$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$\therefore\ a_n = \frac{12}{n}$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

6. 제 3 항이 12 이고 제 6 항이 −96 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$　② $(-3) \cdot 2^{n-1}$　③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$
④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$　⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = 12$
$a_6 = ar^5 = -96$
$r^3 = -8$
$\therefore r = -2$
$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$
$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

7. 세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, x^2+y^2의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2x=1+5=6 \quad \therefore x=3$
세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2=5$
따라서 $x^2+y^2=14$

8. 제 4 항이 -16, 제 7 항이 128인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 20 항까지의 합은?

① $\frac{1}{3}(2^{20}-1)$ ② $\frac{1}{3}(1-2^{20})$ ③ $\frac{1}{3}(1-2^{20})$
④ $2(1-2^{20})$ ⑤ $2(1+2^{20}))$

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$ar^3=-16,\ ar^6=128$
$r^3=-8$
$\therefore\ r=-2,\ a=2$
$S_{20}=\dfrac{2\left\{1-(-2)^{20}\right\}}{1-(-2)}$
$=\dfrac{2}{3}(1-2^{20})$

9. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$1, 4, 9, 16 \cdots$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$

④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$

$\therefore a_n = n^2$

10. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_7 = 60$일 때, $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$의 값은?

① 140　② 145　③ 150　④ 155　⑤ 160

해설

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 $a_2,\ a_6,\ a_{10}$과 $a_5,\ a_6,\ a_7$은 모두 등차수열을 이룬다.
따라서 a_6은 a_2와 a_{10}, a_4와 a_8, a_5와 a_7의 등차중항이므로

$$
\begin{aligned}
&a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} \\
&= (a_2 + a_{10}) + (a_4 + a_8) + a_6 \\
&= 2a_6 + 2a_6 + a_6 = 5a_6 \\
&= 5 \cdot \frac{a_5 + a_7}{2} = 5 \cdot \frac{60}{2} (\because\ a_5 + a_7 = 60) \\
&= 150
\end{aligned}
$$

11. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 각각 n^2+kn, $2n^2-2n+1$일 때, $a_{10}=b_{10}$을 만족하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$a_{10}=(10^2+10k)-(9^2+9k)=19+k$

$$b_{10}=(2\cdot 10^2-2\cdot 10+1)-(2\cdot 9^2-2\cdot 9+1)$$
$$=181-145=36$$

$a_{10}=b_{10}$에서 $19+k=36$

$\therefore\ k=17$

12. 이차방정식 $x^2-6x+2=0$의 서로 다른 두 실근 α, β에 대하여 α, β의 등차중항, 양의 등비중항, 조화중항을 각각 A, G, H라 할 때, A, G, H의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

① $A>G>H$ ② $A>H>G$ ③ $G>A>H$
④ $H>G>A$ ⑤ $H>A>G$

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=2$
따라서
$A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{6}{2}=3$
$G=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{2}$
$H=\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{2\times 2}{6}=\dfrac{2}{3}$
따라서 $A>G>H$이다.

13. 세 수 $\alpha,\ p,\ \beta$는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $\alpha,\ 2\sqrt{q},\ \beta$는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$로 나타내면?

① $\frac{\alpha}{4},\ \frac{\beta}{4}$ ② $\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2}$ ③ $\alpha,\ \beta$
④ $2\alpha,\ 2\beta$ ⑤ $4\alpha,\ 4\beta$

해설

$\alpha,\ p,\ \beta$는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$p=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\alpha,\ 2\sqrt{q},\ \beta$는 이 순서로 등비수열을 이루므로

$(2\sqrt{q})^2=\alpha\beta,\ 4q=\alpha\beta\ \therefore q=\frac{\alpha\beta}{4}$

$x^2-px+q=0$에서

$x^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)x+\left(\frac{\alpha\beta}{4}\right)=0$

$\therefore \left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$

따라서 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근은 $\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2}$이다.

14. $a_1 = 1$ 이고, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 m 이 짝수일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{m-1} = 85$, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots a_m = 170$ 이다. 이때, $r + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$m = 2k$(k는 자연수) 라고 하자.

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$

$= \dfrac{a_1(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = \dfrac{r^{2k} - 1}{r^2 - 1} = 85 \cdots$ ㉠

$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k}$

$= \dfrac{a_2(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = 170 \cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r = 2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2^{2k} - 1}{3} = 85$, $2^{2k} = 256 = 2^8$

따라서 $2k = m = 8$

$r + m = 10$

15. 첫째항이 3 이고 공비가 2 인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100 보다 크게 되는가?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$S_n = \dfrac{3(2^n - 1)}{2-1} > 100$ 인

자연수 n 의 최솟값을 구하면 된다.

$2^n - 1 > \dfrac{100}{3}$

$2^n > \dfrac{103}{3} \fallingdotseq 34.\times\times\times$

$2^5 = 32,\ 2^6 = 64$ 이므로

$n = 6$

16. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하면
$S_n = n^2 + kn$, $\log_3(T_n - 1) = n$이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$S_n = n^2 + kn$이므로
$a_3 = S_3 - S_2$
$(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$
$\log_3(T_n - 1) = n$에서 $T_n = 3^n + 1$이므로
$b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$
$= 28 - 10 = 18$
이때, $a_3 = b_3$이므로 $k + 5 = 18$ $\therefore$ $k = 13$

17. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $\log_3(S_n+1)=n$을 만족할 때, a_3의 값은?

① 6　　② 10　　③ 14　　④ 18　　⑤ 22

해설

$3^n = S_n + 1$

$S_n = 3^n - 1$

$S_{n-1} = 3^{n-1} - 1$

$$\begin{aligned} a_n &= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1)\ (n \geq 2) \\ &= 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1 \\ &= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

$a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$

18. 등차수열 $85,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_p,\ 100,\ y_1,\ y_2, \cdots,$ $y_q,\ 105$의 합이 2375가 되도록 하는 $p,\ q$의 값은?

① $p=11,\ q=3$ ② $p=12,\ q=4$ ③ $p=15,\ q=3$

④ $p=16,\ q=4$ ⑤ $p=17,\ q=5$

해설

(i) 두 수열 $85,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_p,\ 100$과 $100,\ y_1,\ y_2, \cdots, y_q,\ 105$는 공차가 같은 등차수열이므로

$100 = 85 + (p+1)d,\ 105 = 100 + (q+1)d$

$\dfrac{100-85}{p+1} = \dfrac{105-100}{q+1}$

$15(q+1) = 5(p+1) \quad \therefore\ p = 3q+2$

(ii) 주어진 수열은 첫째항이 85, 끝항이 105, 항수가 $p+q+3$인 등차수열이고, 그 합이 2375이므로 $\dfrac{(p+q+3)(85+105)}{2} = 2375$

$p+q+3 = 25 \quad \therefore\ p+q = 22 \cdots ㉠$

이때, (i)에서 $p=3q+2$이므로 이것과 ㉠을 연립하여 풀면

$p=17,\ q=5$

19. 세 수 $\sin\theta$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\cos\theta$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $3|\tan\theta+\cot\theta|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이 등차중항이므로 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}{4}=\frac{3}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{16}\cdot 4$

$2\sin\theta\cdot\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cdot\cos\theta=-\frac{1}{8}$

$\therefore$ (준식)$=3\left|\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right|=3\times 8=24$

20. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5이고, 공차가 4인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$으로 나타내어진다. 이때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 140

해설

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n\left\{2 \cdot 5 + (n-1)4\right\}}{2} = n(2n+3)$$

$$\therefore\ b_n = \frac{n(2n+3)}{n} = 2n+3(\text{단}, n \neq 0)$$

따라서 수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 $b_1 = 2 + 3 = 5$이고, 공차가 $b_2 - b_1 = 7 - 5 = 2$인 등차수열이다.

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{10} = \frac{10(2 \cdot 5 + 9 \cdot 2)}{2} = 140$$

21. 매년 자동차에서 배출되는 매연의 양을 1950년부터 조사한 결과, 최근 10년 동안 배출된 매연의 양은 그 이전까지 배출된 매연의 양의 2배와 같다고 한다. 이와 같은 추세가 계속된다고 가정하고, 1960년까지 배출된 매연의 양을 A라 할 때, 2031년 부터 2040년까지 배출되는 매연의 양은?

① 3^7A ② 2×3^7A ③ 3^8A

④ 2×3^8A ⑤ 3^9A

해설

1960년까지 배출된 매연의 양이 A이므로
1961년부터 1970년까지 10년 동안 배출된 매연의 양은 $2A$
1971년부터 1980년까지 10년 동안 배출된 매연의 양은 $2(A+2A)=6A$
1981년부터 1990년까지 10년 동안 배출된 매연의 양은 $2(A+2A+6A)=18A$

$\vdots$

이때, $2A,\ 6A,\ 18A,\ 54A,\cdots$를 수열 $\{a_n\}$이라 하면
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $2A$이고 공비가 3인 등비수열을 이룬다.
따라서 구하는 2031년부터 2040년까지 배출되는 매연의 양은
$a_8=2A\times3^7=2\times3^7A$

22. 월초에 200만원짜리 컴퓨터를 구입한 다음, 다음 달 초부터 12개월간 일정한 금액의 할부금을 지불하기로 하였다. 월이율 1%의 1개월마다의 복리로 계산할 때, 매달 갚아야 할 금액은? (단, $(1.01)^{12} = 1.13$으로 계산하고, 십 원 단위에서 반올림한다.)

① 172400원 ② 173800원 ③ 175200원

④ 176800원 ⑤ 177100원

해설

(갚아야 할 금액)$=$ 200만 $\times 1.01^{12}$

매달 갚는금액을 a원이라 하면

첫째달의 a원은 11개월의 이자가 붙고,

둘째달의 a원은 10개월의 이자가 붙고,

$\vdots$

마지막달의 a원은 0개월의 이자가 붙는다.

따라서 매달 갚는 금액의 원리합계는

첫째항이 a, 공비가 1.01인 등비수열의

12번째항까지의 합과 같다.

$\therefore \dfrac{a(1.13-1)}{0.01} = \dfrac{0.13}{0.01}a$

$13a =$ 200만$\times 1.13$

$a = \dfrac{200 \times 1.13}{13} = 173846$원

십의 자리에서 반올림하면 173800원

23. 첫째항이 $a(a \neq 2)$이고 둘째항이 b인 등차수열 $\{a_n\}$의 항 중에 2가 존재하기 위한 필요충분조건은?

① $\dfrac{a-2}{a-b}$가 자연수 ② $\dfrac{a+b}{a-2}$가 자연수
③ $\dfrac{a-2}{b-a}$가 자연수 ④ $\dfrac{a+b}{b+2}$가 자연수
⑤ $\dfrac{b-2}{b-a}$가 자연수

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 $b-a$이므로 일반항 a_n은 $a_n = a + (n-1)(b-a)$

그런데 수열 $\{a_n\}$ 중 2인 항이 존재하므로 그 항을 m으로 놓으면

$a_m = 2 = a + (b-a)(m-1)$, 즉, $m - 1 = \dfrac{a-2}{a-b}$

그런데 $a \neq 2$이므로 $m - 1 \neq 0$

즉, $m-1$은 0이 아닌 자연수이므로 $\dfrac{a-2}{a-b}$는 자연수이다.

24. 유한 등차수열 $\{a_n\}$과 무한 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여

$\{a_n\}: 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots,\ 200$

$\{b_n\}: 2,\ 7,\ 12,\ \cdots$

일 때, 두 수열에 공통으로 포함된 수의 총합은?

① 1200 ② 1220 ③ 1231 ④ 1240 ⑤ 1261

해설

두 수열에 공통으로 포함된 가장 작은 수는 7이고 두 수열의 일반항이 각각 $a_n = 3n - 2,\ b_n = 5n - 3$

이므로 두 수열에 공통으로 포함된 수는 적당한 자연수 $p,\ q$에 대하여

$3p - 2 = 5q - 3,\ 3p = 5q - 1$

(1) $q = 3k \ \rightarrow\ 5q - 1 = 15k - 1$

(2) $q = 3k + 1 \ \rightarrow\ 5q - 1 = 15k + 4$

(3) $q = 3k + 2 \ \rightarrow\ 5q - 1 = 15k + 9$

따라서 새로운 수열을 c_n이라 하면

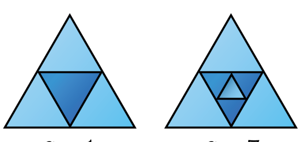
$c_n = 5q - 3 = 5(3n - 1) - 3 = 15n - 8$

이 수열의 합은 $c_1 = 7,\ c_{13} = 15 \times 13 - 8 = 187$

즉, 첫째항이 7, 끝항이 187, 항수 13인 등차수열의 합이므로

$S_7 = \frac{13}{2}(7 + 187) = 1261$

25. 정삼각형 모양의 색종이가 있다. 그림과 같이 정삼각형의 각 변의 중점을 선분으로 연결하면 색종이는 4개의 작은 정삼각형으로 나누어진다. 이들 4개의 정삼각형 중 가장 안쪽의 정삼각형에 대하여 다시 각 변의 중점을 선분으로 연결하면 색종이는 모두 7개의 정삼각형으로 나눈어진다. 이와 같은 시행을 n번 반복했을 때 나누어진 정삼각형의 개수를 a_n이라 하자, 예를 들어, $a_1 = 4$, $a_2 = 7$이다. 이때, a_{10}의 값을 구하여라.



$a_1=1$ $a_2=7$

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$a_1 = 4$, $a_2 = 4 + 3 = 7$, $a_3 = 7 + 3 = 10, \cdots$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore a_n = 4 + 3(n - 1) = 3n + 1$

$\therefore a_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 31$