1. 수열 $-1,\ 3,\ -5,\ 7,\ -9,\ \cdots$ 의 7번째 항은?

① -13 ② -10 ③ 11 ④ -11 ⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 홀수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 6번째 항은 11, 7번째 항은 -13이다.

2. 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $3n-2$ ② $3n-1$ ③ $3n$
④ $3n+1$ ⑤ $3n+3$

해설

$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$

3. 다음 등차수열의 제 20항을 구하여라.

$131,\ 137,\ 143,\ 149,\ 155,\ 161, \cdots$

▶ 답:

▷ 정답: 245

해설

주어진 등차수열의 제 1항을 a, 공차를 d라고 하자.
$a = 131,\ d = 137 - 131 = 6$이므로
$a_n = 131 + (n-1) \cdot 6 = 6n + 125$
$\therefore\ a_{20} = 6 \cdot 20 + 125 = 245$

4. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

5, (가), 17, (나), (다)

① 10, 22, 27 ② 10, 23, 29 ③ 11, 23, 27

④ 11, 23, 29 ⑤ 12, 24, 29

해설

5와 17의 등차중항은 $\frac{5+17}{2}=11$, 이 수열의 공차는 6이다.

따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 11, 23, 29이다.

5. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{2n+1}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항과 공비 r을 차례대로 구하면?

① $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{6} \cdot 3$ ③ $\frac{9}{2}$, 9 ④ $\frac{1}{6}$, 9 ⑤ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$

해설

$a_1 = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2}$, $\frac{1}{6} \cdot 3^5 = \frac{81}{2}$

$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{81}{2}}{\frac{9}{2}} = 9$

$\therefore a_1 = \frac{9}{2}$, $r = 9$

6. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots$

① $(-1)^{n+1} \times n$　② $n-(-1)^n$　③ $(-1)^n + n$

④ $(-1)^n \times n$　⑤ $\frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}$

해설

$a_1 = -1 \cdot 1$

$a_2 = (-1)^2 \cdot 2$

$a_3 = (-1)^3 \cdot 3$

$a_4 = (-1)^4 \cdot 4$이므로

$a_n = (-1)^n \cdot n$

7. 등차수열 2, 5, 8, 11, ⋯ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구하면?

① $n(3n+2)$ ② $\frac{1}{2}n(3n+1)$ ③ $\frac{1}{3}n(n+3)$
④ $n(2n-1)$ ⑤ $\frac{1}{2}n(n+1)$

해설

$a=2,\ d=5-2=3$ 이므로

$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)\cdot d\}}{2}$ 에 대입하면

$=\frac{n\{2\cdot 2+(n-1)\cdot 3\}}{2}$

$=\frac{n(4+3n-2)}{2}$

$=\frac{n(3n+1)}{2}$

8. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 72$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24}$의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 432

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 4a + 46d = 72$

$2a + 23d = 36$

$\therefore\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} = \dfrac{24(2a + 23d)}{2}$

$= 12 \times 36$

$= 432$

9. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항에서 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, a_{15}를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 240

해설

$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$이므로

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\{n+2-(n-1)\}}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\cdot 3}{3}$$

$$= n(n+1)$$

$\therefore\ a_{15} = 15 \times 16 = 240$

10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

$a_{10} = S_{10} - S_9$
$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$
$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$
$\therefore\ a_{10} = 119 - 98 = 21$

11. 제2항이 6, 제5항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은? (단, 공비는 실수)

① 3^9 ② $2 \cdot 3^9$ ③ 3^{10}
④ $2 \cdot 3^{10}$ ⑤ 3^{11}

해설

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_2 = ar = 6$ ……㉠
$a_5 = ar^4 = 162$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a = 2,\ r = 3$
따라서 등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3이므로 일반항 a_n은
$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
$\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$

12. 제 4항이 6, 제 7항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{9}(3^{10}-1)$ ② $\frac{1}{10}(3^{10}-1)$ ③ $\frac{1}{9}(3^{10}+1)$
④ $\frac{1}{10}(3^{10}+1)$ ⑤ $\frac{1}{9}(3^{11}-1)$

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$ar^3 = 6,\ ar^6 = 162$
$r^3 = 27$
$\therefore\ r = 3,\ a = \frac{2}{9}$
$S_n = \frac{\frac{2}{9}\cdot(3^{10}-1)}{3-1} = \frac{1}{9}(3^{10}-1)$

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_n = 2^n + (-1)^n$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$의 값은?

① $2^{10} - 3$ ② $2^{10} - 1$ ③ 2^{10}

④ $2^{10} + 1$ ⑤ $2^{10} + 3$

해설

$a_n = 2^n + (-1)^n$이므로

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + \cdots + a_9 \\ &= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots (2^9 - 1) \\ &= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1 \\ &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3 \end{aligned}$$

14. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n + 2$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 이므로

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2)$

$= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9)$

$= 16$

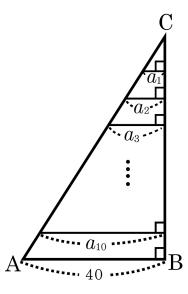
15. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 두 등차수열 $\{2a_n\}$, $\{3a_n+2\}$의 공차의 합은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로
$a_{n+1}-a_n=2$
수열 $\{2a_n\}$의 공차를 d_1이라 하면
$d_1=2a_{n+1}-2a_n=2(a_{n+1}-a_n)=2\times2=4$
수열 $\{3a_n+2\}$의 공차를 d_2이라 하면
$d_2=(3a_{n+1}+2)-(3a_n+2)=3(a_{n+1}-a_n)=3\times2=6$
$\therefore\ d_1+d_2=4+6=10$

16. 오른쪽 그림과 같이 밑변 AB의 길이가 40인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC를 11등분하여 변 AB와 평행한 10개의 선분을 그려 그 길이를 각각 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}이라 할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 200

해설

$a_1+a_{10}=40$, $a_2+a_9=40$, $\cdots$, $a_5+a_6=40$이므로
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=40\times5=200$

17. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5a_7 = 6$일 때, $a_2a_4a_6a_8a_{10}$의 값은?

① $\pm 6\sqrt{6}$ ② $\pm 18\sqrt{6}$ ③ $\pm 36\sqrt{6}$

④ $\pm 8\sqrt{6}$ ⑤ ± 243

해설

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 a_2, a_6, a_{10}과 a_4, a_6, a_8 그리고 a_5, a_6, a_7은 모두 등비수열을 이룬다.

따라서 a_6은 a_2와 a_{10}, a_4와 a_8, a_5와 a_7의 등비중항이므로

$$\begin{aligned} a_2a_4a_6a_8a_{10} &= (a_2a_{10})(a_4a_8)a_6 \\ &= a_6^2 \cdot a_6^2 \cdot a_6 \\ &= a_6^5 \end{aligned}$$

이때, $a_5a_7 = a_6^2 = 6$이므로 $a_6 = \pm\sqrt{6}$

$\therefore a_6^5 = \pm 36\sqrt{6}$

18. 수열 $\{\log_2 a_n\}$이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다. 이때, $\dfrac{a_{10}}{a_9}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= 2 + (n-1)\cdot 3 \\ &= 3n - 1\end{aligned}$$

$a_n = 2^{3n-1}$

$\dfrac{a_{10}}{a_9}$는 공비이므로 8

19. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 $\frac{S_{3n}}{S_n}=7$일 때, $\frac{S_{2n}}{S_n}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

첫째항을 a_1이라고 하면

$$\frac{S_{3n}}{S_n}=\frac{\frac{a_1(r^{3n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}}=7,\ \frac{r^{3n}-1}{r^n-1}=7$$

$$\frac{(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r^n-1}=7,\ r^{2n}+r^n+1=7$$

$$(r^n)^2+r^n-6=0,\ (r^n+3)(r^n-2)=0$$

$$\therefore\ r^n=2(\because\ r>1)$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{\frac{a_1(r^{2n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}}=\frac{r^{2n}-1}{r^n-1}$$

$$\frac{(r^n-1)(r^n+1)}{r^n-1}=r^n+1=3$$

20. 수열 $8,\ 4,\ 2,\ \frac{1}{2},\cdots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11항　② 제12항　③ 제13항

④ 제14항　⑤ 제15항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$

21. 수직선 위의 세 점 A(2), B(4), C(a)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 P, 선분 BC를 5 : 3으로 외분하는 점을 Q라 하자. 세 점 A, P, Q의 좌표가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, a의 값은?

① 6 ② $\frac{31}{5}$ ③ $\frac{32}{5}$ ④ $\frac{34}{5}$ ⑤ 7

해설

점 P의 좌표를 x라 하면

$x = \frac{8-2}{2-1} = 6$

점 Q의 좌표를 y라 하면

$y = \frac{5a-12}{5-3} = \frac{5a-12}{2}$

이때, 세 수 2, 6, $\frac{5a-2}{2}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2 + \frac{5a-12}{2} = 6 \times 2$

$5a = 32$

$\therefore\ a = \frac{32}{5}$

22. 어떤 관광버스가 갈 때는 a km/h의 속력으로, 올 때는 b km/h의 속력으로 운행하였다. 이때, 이 버스가 왕복 운행하는 동안의 평균 속력은?

① $\frac{ab}{a+b}$ ② $\frac{2ab}{a+b}$ ③ $\frac{2b}{2(a+b)}$
④ $\frac{2ab}{2(a+b)}$ ⑤ $\frac{2(a+b)}{ab}$

해설

버스가 운행하는 두 지점 사이의 거리를 $s$km라고 하면 왕복거리는 $2s$km이고, 갈 때는 $\frac{s}{a}$시간, $\frac{s}{b}$시간이 걸리므로 구하는 평균 속력을 v라고 하면

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

23. 12와 18로 나누어떨어지는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13500

해설

12와 18로 나누어떨어지는 수는 12와 18의 최소공배수인 36으로 나누어떨어지는 수이므로 $36n$(n은 자연수)의 꼴이다.
이때, $100 \le 36n \le 1000$이므로
$2.\times\times \le n \le 27.\times\times$
$\therefore\ n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 27$
$n = 3$일 때, $36n = 108$
$n = 27$일 때, $36n = 972$이므로
조건을 만족하는 수열은 첫째항이 108, 끝항이 972, 항수가 $27 - 2 = 25$인 등차수열을 이룬다.
따라서 구하는 총합은
$$\frac{25(108 + 972)}{2} = 13500$$

24. 다섯 개의 실수 a, b, c, d, e를 적당히 배열하여 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다. a, b, c, d, e가 다음 조건을 만족시킬 때, b가 이 수열의 제 n항이라 하면 n의 값은?

(가) $e = \sqrt{cd}$
(나) $\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$
(다) $a < b$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

조건 (가)에서 $e = \sqrt{cd}$이므로 $e^2 = cd$, 즉, e는 c, d의 등비중항이므로 c, e, d 또는 d, e, c의 순서대로 등비수열을 이룬다.
조건 (나)에서 $\frac{a}{e} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = ce$이므로 a, c, e, d 또는 d, e, c, a의 순서대로 등비수열을 이룬다.
조건 (다)에서 $a < b$이므로 a, c, e, d, b 또는 d, e, c, a, b 이므로 b는 항상 제 5항이다.

25. 다음 값을 계산하면?

$$\log_2 4 + \log_2 4^3 + \log_2 4^9 + \cdots + \log_2 4^{3^{n-1}}$$

① $\log_2 4^{3^{n-1}}$ ② $\log_2 4^{3^n}$ ③ $\log_2 3^{n+1}$

④ $3^n - 1$ ⑤ $3^n + 1$

해설

주어진 식은 $a_n = \log_2 4^{3^{n-1}}$ 인 수열의 합 S_n 이다.

$a_n = 3^{n-1} \cdot \log_2 4 = 2 \cdot 3^{n-1}$

a_n 은 첫째항이 2, 공비가 3 인 등비수열이므로

$S_n = \dfrac{2 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$