1. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$의 값은?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$
$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$
$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$
$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

2. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7i}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\sum_{j=1}^{10}j\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(385+385)=385$$

3. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \{\sum_{k=1}^{n}(2a_k - 3b_k + 5)\}$의 값은?

① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

해설

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{10} \{2\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 5\} \\
&= \sum_{n=1}^{10}(2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n) \\
&= \sum_{n=1}^{10}(20n - 15n + 5n) \\
&= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\
&= 550
\end{aligned}$$

4. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$ ② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$ ③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$ ⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로

$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$ ② $\frac{n}{n+1}$ ③ $\frac{2n}{n+1}$
④ $\frac{2n}{2n+1}$ ⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식)$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

6. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{n+1}$ ② $\dfrac{n}{n+1}$ ③ $\dfrac{2n}{n+1}$

④ $\dfrac{n}{2n+1}$ ⑤ $\dfrac{2n}{2n+3}$

해설

(주어진 식) $= \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

$\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)\right\}$

$+\cdots+\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$

7. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

해설

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3$이므로
a_n은 초항이 4, 공차가 3인 등차수열
$\therefore a_n = 4 + (n-1) \cdot 3$
$= 4 + 3n - 3$
$= 3n + 1$
$\therefore a_{10} = 31$

8. $a_1 = 1,\ a_2 = 3$이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log_3 a_{10}$의 값은?

① $9\log_3 2$ ② $10\log_3 2$ ③ $11\log_3 2$

④ 9 ⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

$a_1 = 1,\ r = \dfrac{a_2}{a_1} = 3$이므로

$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$

$\therefore\ \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9\log_3 3 = 9$

9. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\dfrac{9}{10}$ ② $\dfrac{11}{10}$ ③ $\dfrac{10}{11}$ ④ $\dfrac{20}{11}$ ⑤ $\dfrac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

10. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + 1^2 \\ a_3 &= a_2 + 2^2 \\ a_4 &= a_3 + 3^2 \\ &\vdots \\ +)\ a_{10} &= a_9 + 9^2 \end{aligned}$$

$$a_{10} = a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2)$$

$$= 5 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6}$$

$$= 290$$

11. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$이 성립하고 $a_1 = 1$일 때, $a_{10} + 1$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$이므로 $\alpha = -1$

$\therefore\ a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

12. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$이라 할 때 $p+q$의 값을 구하여라.

보기

· $a_1 = 1,\ a_2 = 2$
· $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

▶ 답:

▷ 정답: -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1$이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore\ p = 3,\ q = -48$이므로 $p + q = -45$

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n} (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된다. 자연수의 집합에서 정의되는 함수 $f(n)$을 $f(n) = a_n$이라 할 때, 함수 $f(n)$의 주기는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = \dfrac{2+1}{3} = 1,\ a_4 = \dfrac{1+1}{2} = 1,\ a_5 = \dfrac{1+1}{1} = 2,$

$a_6 = \dfrac{2+1}{1} = 3,\ a_7 = \dfrac{3+1}{2} = 2,\ a_8 = \dfrac{2+1}{3} = 1,\ a_9 = \dfrac{1+1}{2} = 1,\ a_{10} = \dfrac{1+1}{1} = 2, \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 3, 2, 1, 1, 2가 반복된다.

따라서 함수 $f(n) = a_n$의 주기는 5이다.

14. $a_1=3,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{66}a_n$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 120

해설

$a_1=3,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_3=\dfrac{2+1}{3}=1$

$a_4=\dfrac{1+1}{2}=1$

$a_5=\dfrac{1+1}{1}=2$

$a_6=\dfrac{2+1}{1}=3$

$a_7=\dfrac{3+1}{2}=2$

$\vdots$

$\therefore\ a_1=a_6=a_{11}=\cdots=3$

$a_2=a_7=a_{12}=\cdots=2$

$a_3=a_8=a_{13}=\cdots=1$

$a_4=a_9=a_{14}=\cdots=1$

$a_5=a_{10}=a_{15}=\cdots=2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{66}a_n=13(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+a_1$

$=13\times 9+3=120$

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립함을 증명한 것이다. ㅁ안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)= 1, (우변)= $1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{\quad}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{\quad}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $2k+1$ ② $2k-1$ ③ $2k$
④ $k+1$ ⑤ $k-1$

해설

(i) $n=1$일 때, (좌변)= 1, (우변)= $1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

16. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 $(\boxed{\text{㉠}})^3$ 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{\text{㉠}})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{\text{㉠}})^3$

$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{\text{㉠}})^3$

$= \frac{(m+1)^2(\boxed{\text{㉡}})^2}{4}$

$= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{\text{㉡}})}{2}\right\}^2$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5)+g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 $(\text{㉠})^3$ 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (m+1)^3$

$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$

$= \left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

즉, $f(m)=m+1,\ g(m)=m+2$

$\therefore f(5)=5+1=6,\ g(6)=6+2=8$

$\therefore f(5)+g(6)=6+8=14$

17. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $4^n \le 2^{n-1}(1+3^n)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=4$, (우변)$=2^{1-1}(1+3)=4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
$4^{k+1} \le$ [(가)] $(1+3^k)$
$=2^k(2+2\cdot 3^k)$
$=2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) =$ [(나)]
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
$4^{k+1} \le$ [2^{k+1}] $(1+3^k)$
$=2^k(2+2\cdot 3^k)$
$=2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) =$ [$2^k(1+3^{k+1})$]
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

18. 수열 3, 4, 6, 10, 18, … 의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은?

① $2n^2+2n-1$　② n^2+2n+1　③ 2^n+2n-1

④ n^2-2n+1　⑤ 2^n-2n

해설

$\{a_n\}$: 3, 4, 6, 10, 18, …

$\quad\quad\ \vee\ \vee\ \vee\ \vee$

$\{b_n\}$: 1, 2, 4, 8, …

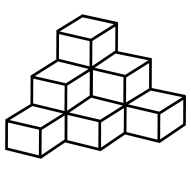
$a_n = 3+\underbrace{(1+2+4+\cdots)}_{(n-1)\text{개}}$

$= 3+\dfrac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^{n-1}+2$

$\therefore\ S_n = \sum_{k=1}^{n}(2^{k-1}+2) = \dfrac{2^n-1}{2-1}+2n$

$= 2^n+2n-1$

19. 오른쪽 그림과 같이 3층탑을 쌓기 위해서는 10개의 정육면체가 필요하다. 이와 같은 모양의 탑을 10층으로 쌓을 때, 필요한 정육면체의 개수를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 220

해설

n층으로 탑을 쌓을 때, 맨 위층에서부터 각 층에 필요한 정육면체의 수를 a_n이라 하면
수열 $\{a_n\}$은 1, 3, 6, 10, 15, $\cdots$
이 때, 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면 $\{b_n\}$은 2, 3, 4, 5, $\cdots$ 이므로 $b_n = n+1$이다.

$\therefore a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1+(2+3+4+\cdots+n) = \dfrac{n(n+1)}{2} (n \geq 1)$

따라서 10층으로 탑을 쌓을 때 필요한 정육면체의 총 개수는

$\sum_{k=1}^{10} a_n = \sum_{k=1}^{10} \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10} n^2 + \sum_{k=1}^{10} n\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + \dfrac{10\cdot 11}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}(385+55) = 220$

20. 수열 1, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 3, 5, 7, ⋯ 을 다음과 같이 군으로 묶어서 나타내었다.

제1군 제2군 제3군 제4군 ⋯

(1), (1, 3), (1, 3, 5), (1, 3, 5, 7), ⋯

제 m군의 제 n항을 $f(m, n)$이라 할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $\sum_{k=1}^{10} f(k, k) = \sum_{k=1}^{10} f(10, k)$

㉡ $f(m+1, n+1) - f(m, n)$의 값은 일정하다.

㉢ $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(n, k)$라 하면 $\sum_{k=1}^{10} S_n = 385$이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 제 k군의 제 k항을 나열하면 1, 3, 5, 7, ⋯ 이므로
$\sum_{k=1}^{10} f(k,k) = 1+3+5+\cdots+19$이고, 이는 제 10군의 모든 항의 합과 같다.
$\sum_{k=1}^{10}(k, k) = \sum_{k=1}^{10} f(10, k)$(참)

㉡ 제m군의 제 n항은 제$m+1$군의 제 n항과 같고, 각 군의 항들은 공차가 2인 등차수열이므로
$f(m+1,n+1)-f(m, n) = f(m+1,n+1)-f(m+1,n) = 2$(참)

㉢ 각 군의 제 k항은 $2k-1$이므로 $f(n, k) = 2k-1$
$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ $\therefore \sum_{k=1}^{10} k^2 = 385$

21. 자연수 n에 대하여 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> ㉠ 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
>
> ㉡ 점 P_n의 좌표가 $(a,\ b)$일 때,
> $b < 2^a$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 $(a,\ b+1)$이고
> $b = 2^a$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 $(a+1,\ 1)$이다.

① $2^{10}-2$ ② $2^{10}+2$ ③ $2^{11}-2$
④ 2^{11} ⑤ $2^{11}+2$

해설

P_n의 좌표를 순서대로 구해보면
$P_1(1,\ 1),\ P_2(1,\ 2),\ P_3(2,\ 1),\ P_4(2,\ 2),$
$P_5(2,\ 3),\ P_6(2,\ 4),\ P_7(3,\ 1),\ P_8(3,\ 2)\cdots$
x좌표가 동일한 것들을 묶어서 군수열로 표시하면
$(P_1, P_2),\ (P_3, P_4, P_5, P_6),\ (P_7, P_8, \cdots, P_{14}), \cdots$ 이다.
각 군의 항의 수는 첫째항 2이고 공비 2인 등비수열이고,
$(10,\ 2^{10})$은 제 10군의 마지막 항이다.
제 10군까지의 항의 개수의 합이 구하는 n의 값이므로

$$\therefore n = \frac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2^{11}-2$$

22. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

① $\dfrac{9}{4}$ ② $\dfrac{11}{4}$ ③ $\dfrac{13}{4}$ ④ $\dfrac{15}{4}$ ⑤ $\dfrac{17}{4}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_n \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n$을 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2 = \dfrac{1\cdot 3}{2^2}a_1$

$a_3 = \dfrac{2\cdot 4}{3^2}a_2$

$a_4 = \dfrac{3\cdot 5}{4^2}a_3$

$\vdots$

$\times)\ a_n = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}a_{n-1}$

$\therefore\ a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n$

$= \dfrac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots a_{n-1}$

$\therefore a_n = \dfrac{n+1}{2n}\cdot a_1$

$a_1 = 5$를 대입하면 $a_n = \dfrac{5(n+1)}{2n}$

$\therefore a_{10} = \dfrac{5\cdot 11}{2\cdot 10} = \dfrac{11}{4}$

23. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 의 값이 한 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수는?

$$a_1=\sqrt{3+2\sqrt{2}},\ a_2=\sqrt{5+2\sqrt{6}},\ a_3=\sqrt{7+2\sqrt{12}},\cdots$$

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$a_1=1+\sqrt{2}$
$a_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
$a_3=\sqrt{3}+\sqrt{4}$
$\vdots$
$a_n=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$
$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
$S_n=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+$
$\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
$S_n=\sqrt{n+1}-1$이 한자리 자연수가 되어야 한다.
$S_3=\sqrt{4}-1=1$
$S_8=\sqrt{9}-1=3-2=2$
$\vdots$
$S_{120}=\sqrt{121}-1=11-1=10$
$\therefore$ 9개

24. 0 이상 1 이하의 모든 분수를 다음과 같이 단계별로 나타내었다.

1단계 $\frac{0}{1}$ $\quad$ $\frac{1}{1}$

2단계 $\frac{0}{1}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{1}$

3단계 $\frac{0}{1}$ $\quad$ $\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{1}$

4단계 $\frac{0}{1}$ $\quad$ $\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{2}{5}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{3}{5}$ $\quad$ $\frac{2}{3}$ $\quad$ $\frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{1}$

$\cdots$ $\quad$ $\cdots$

8단계 $\quad$ $\cdots$

이때, 각 단계의 왼쪽에서 $(2n-1)$ 번째 수와 $(2n+1)$ 번째 수가 각각 $\frac{a}{b}$, $\frac{d}{c}$ 이면 $2n$ 번째 수는 $\frac{b+d}{a+c}$ 이다. 이와 같은 방법으로 8단계까지 완성했을 때, 8단계에 나타나는 분수에 대한 보기의 설명 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 분모와 분자의 차가 1인 분수의 개수는 8개이다.

㉡ 분모의 최댓값은 21이다.

㉢ 모든 분수의 합은 $\frac{129}{2}$ 이다.

① ㉠ $\quad$ ② ㉢ $\quad$ ③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢ $\quad$ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 각 단계별로 분모와 분자의 차가 1인 분수는 다음과 같다.

1단계 : $\frac{0}{1}$ $\Rightarrow$ 1개

2단계 : $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 2개

3단계 : $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ 3개

$\vdots$

8단계 : $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\cdots$, $\frac{7}{8}$ $\Rightarrow$ 8개

㉡ 각 단계별로 가장 큰 분모가 생기는 이웃한 두 분수의 분모는 다음과 같다.

1단계 : 1, 1 $\quad$ 2단계 : 2, 1 $\quad$ 3단계 : 2, 3

4단계 : 5, 3 $\quad$ 5단계 : 5, 8 $\quad$ 6단계 : 13, 8

7단계 : 13, 21 $\quad$ 8단계 : 34, 21

따라서 8단계에서의 분모의 최댓값은 34이다.

㉢ 각 단계별로 모든 분수의 개수는 다음과 같다.

1단계 : 2

2단계 : $2+1=3$

3단계 : $3+2=5$

4단계 : $5+4=9$

5단계 : $9+8=17$

6단계 : $17+16=33$

7단계 : $33+32=65$

8단계 : $65+64=129$

이 때, 8단계의 129개의 수를 왼쪽부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{129}$ 라 하면

$a_{65}=\frac{1}{2}$ 이므로 8단계의 모든 분수의 합은 $64+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$

에서 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

25. 아래 표는 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, $\cdots$ 을 왼쪽 위에서부터 대각선으로 써내려간 것이다. 이 때, 위에서 첫 번째, 왼쪽에서 16 번째 칸의 수를 구하여라.

1	0	0	4	6	$\cdots$	
2	3	0	0			
0	5	7				
0	0					

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

주어진 수를 군수열로 나타내면
(1), (0, 2), (0, 3, 0), (4, 0, 5, 0), $\cdots$ 이고,
구하고자 하는 수는 제16군의 첫째 항이다.

제 15군까지의 항의 개수가 $1+2+\cdots+15=\dfrac{15\cdot 16}{2}=120$

그러므로 구하는 수는 수열의 제121 항이다.
1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, $\cdots$ 에서 $2n$ 번째 항은 모두 0 이고,
$2n-1$ 번째 항은 n 이다.
$\therefore 2n-1=121$
$\therefore n=61$