1. $\sum_{k=3}^{10} k(k+2)$ 의 값은?

① 460 ② 468 ③ 478 ④ 480 ⑤ 484

해설

$\sum_{k=1}^{10} k(k+2) = \sum_{k=1}^{10} k(k+2) - \sum_{k=1}^{2} k(k+2)$
$= \sum_{k=1}^{10}(k^2+2k) - \sum_{k=1}^{2}(k^2+2k)$
$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2\sum_{k=1}^{10} k - (3+8)$
$= \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2} - 11$
$= 385 + 110 - 11$
$= 484$

2. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385　　② 550　　③ 1100　　④ 1150　　⑤ 1200

해설

$$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7j}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10} j^2+7\cdot\sum_{j=1}^{10} j\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(385+385)$$
$$=385$$

3. $\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$\sum_{k=1}^{10} \log \dfrac{k+2}{k}$

$= \log \dfrac{3}{1} + \log \dfrac{4}{2} + \log \dfrac{5}{3} + \cdots + \log \dfrac{11}{9} + \log \dfrac{12}{10}$

$= \log \left(\dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{5}{3} \cdots \dfrac{11}{9} \cdot \dfrac{12}{10} \right)$

$= \log \dfrac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$

4. 다음 식의 값은?

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

① 9 ② $3\sqrt{11}-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{99}-1$
④ $\sqrt{101}-1$ ⑤ 11

해설

(준식)$=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$
$=\sqrt{100}-1=9$

5. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 다음 중 $b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}$과 같은 것은?

① $a_{20}-a_9$ ② $a_{20}-a_{10}$ ③ $a_{21}-a_9$
④ $a_{21}-a_{10}$ ⑤ $a_{21}-a_{11}$

해설

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ 이므로
$a_{21} = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{20}$
$b_{10} + b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{20}$
$= a_{21} - (a_1 + b_1 + b_2 + \cdots b_9)$
$= a_{21} - a_{10}$

6. 다음 수열에서 $a+b$의 값을 구하여라.

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ a,\ b,\ \cdots$$

▶ 답:

▷ 정답: 38

해설

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1, & & 2, & & 4, & & 7, & & 11, & & 16, & & 22 \\ & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & & \bigvee & \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \end{array}$$

$\therefore a=16,\ b=22$

$a+b=16+22=38$

7. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로
$a_n = 2 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 5$
$\therefore\ a_{10} = -3\cdot 10 + 5 = -25$

8. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26　② 31　③ 36　④ 46　⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$ 이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$
$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$
$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

9. 다음을 계산하여라.

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$

▶ 답:

▷ 정답: 1045

해설

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$
$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2)$
$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$
$= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k$
$= 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$
$= 1155 - 110$
$= 1045$

10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, $\sum_{k=1}^{5} ka_k$의 값은?

① 110　② 125　③ 145　④ 160　⑤ 180

해설

$S_n = n^2 + 2n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$

$= 2n + 1 (n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$

$n = 1$ 일 때,

$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

따라서

$a_n = 2n + 1 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이므로

$\sum_{k=1}^{5} ka_k = \sum_{k=1}^{5} k(2k+1)$

$= \sum_{k=1}^{5}(2k^2 + k) = 2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k$

$= 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} = 125$

11. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두 근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① $\frac{11}{21}$　② $\frac{20}{21}$　③ $\frac{31}{21}$　④ $\frac{40}{21}$　⑤ $\frac{50}{21}$

해설

(준 식)$=\sum_{n=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\cdot\beta_n}$

$=\sum_{n=1}^{10}\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$

$=4\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$

12. $\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{2^k}{10}\right]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 200

해설

k에 1부터 10까지 차례로 대입하여 각 항의 값을 구해서 더하면

$\sum_{k=1}^{10}\left[\frac{2^k}{10}\right]=\left[\frac{2^1}{10}\right]+\left[\frac{2^2}{10}\right]+\left[\frac{2^3}{10}\right]+\left[\frac{2^4}{10}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{10}}{10}\right]$

$=0+0+0+1+3+6+12+25+51+102=200$

13. 다음 수열의 합을 구하여라.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8194

해설

$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 9 \cdot 2^9 \cdots$ ㉠

$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + 8 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^{10} \cdots$ ㉡

이므로 ㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned} -S &= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 2 - 9 \cdot 2^{10} \\ &= 2 \cdot 2^9 - 18 \cdot 2^9 - 2 \\ &= -16 \cdot 2^9 - 2 \end{aligned}$$

$\therefore S = 2^{13} + 2 = 1024 \times 8 + 2 = 8194$

14. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n(n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 수열 $\{a_n\}$이 정의될 때, a_n을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$의 n에 $n = 1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면
$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$
$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$
$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$

15. $a_1 = 3,\ a_2 = \frac{3}{7},\ \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n < \frac{1}{50}$을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$은 등차수열을 이룬다. 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 공차를 d라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항 $\frac{1}{a_n}$은

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1)\cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$

$\therefore\ a_n = \frac{3}{6n-5}$

$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50}$에서 $n \geq 25.\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 26이다.

16. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$

$= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots\cdots$ ㉠

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, (좌변)= (우변)=2

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{(가)}$를 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{(나)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{(가)}$

$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\frac{g(10)}{f(10)}$의 값은?

① $\frac{1}{1024}$　② $\frac{1}{512}$　③ 512　④ 1024　⑤ 2048

해설

(i) $n=1$일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$

(ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$을 대입하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{2(2k+1)}$을 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\boxed{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1)\boxed{2(2k+1)}$

$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(2k+2)(2k+1)$

$= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \cdots (k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i) ,(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉, $f(k) = 2(2k+1)$, $g(k) = (2k+1)2^{k+1}$

$\therefore \frac{g(k)}{f(k)} = 2^k$

$\therefore \frac{g(10)}{f(10)} = 1024$

17. 다음은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n > n^2$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

> (i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
> (ii) $n = k(k \geq 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $2^k > k^2$
> 양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
> $k \geq 5$일 때, $2k^2 -$ ㉡ > 0이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
> 따라서 $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n = 1,\ k^2$ ② $n = 1,\ (k+1)^2$
③ $n = 5,\ (k-1)^2$ ④ $n = 5,\ k^2$
⑤ $n = 5,\ (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
$k \geq 5$일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.
$\therefore$ ㉠ $n = 5$, ㉡ $(k+1)^2$

18. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{n}{n+1}$ ② $\frac{2n}{n+1}$ ③ $\frac{3n}{n+1}$ ④ $\frac{4n}{n+1}$ ⑤ $\frac{5n}{n+1}$

해설

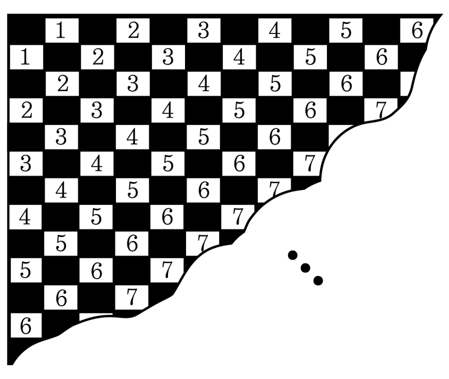
(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$

$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$

19. 다음 그림과 같이 1부터 연속된 자연수가 규칙적으로 배열된 숫자판이 있다. 흰색 부분에 적혀 있는 모든 수들을 작은 수부터 차례대로 나열하여 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, $\cdots$ 와 같은 수열 $\{a_n\}$ 을 만들 때, a_{2014} 를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

수열 $\{a_n\}$을
군수열 (1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3, 3, 3), $\cdots$ 의 꼴로 나타낼 때,
a_{2014} 을 제 n군에 속한다고 하자.
$2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n} 2k=n(n+1)$ 이므로
$n(n+1) \geq 2014$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 n은 45 이므로
2014는 45군에 속한다.
$\therefore a_{2014}=45$

20. $a_1 = b_1 = 1$ 이고 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, $b_{n+1} - b_n = \log_2 a_n$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) 인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 b_{10} 의 값은?

① 37　　② 39　　③ 41　　④ 43　　⑤ 45

해설

$a_1 = 1$ 이고 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2 인 등비수열이다.

$\therefore\ a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$b_{n+1} - b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{n-1} = n - 1$

따라서, 수열의 일반항 b_n은 $n \geq 2$일 때

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)$

$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$

$= \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$

$\therefore\ b_{10} = \frac{10^2 - 3 \times 10 + 4}{2} = 37$

21. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 6a_n - 3^{n+1}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_3의 값은?

① -8 ② -9 ③ -10 ④ -11 ⑤ -12

해설

$a_{n+1} = 6a_n - 3^{n+1}$에서

$a_{n+1} = 6a_n - 6 \cdot 3^n + 3 \cdot 3^n$

$a_{n+1} - 3^{n+1} = 6(a_n - 3^n)$

따라서 수열 $\{a_n - 3\}$은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$

공비가 6인 등비수열이다.

$a_n - 3^n = -6^{n-1} \quad \therefore\ a_n = -6^{n-1} + 3^n$

$\therefore\ a_3 = -36 + 27 = -9$

22. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 짝수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(2)$이 참임을 증명한다.
k가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k+2$이므로 $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+2)$가 참임을 증명해야 한다.
$\therefore a=2,\ \ b=2$
$\therefore a+b=4$

23. 각 자리의 수에 0이 없는 자연수를 크기 순서로 배열한 수열이 있다. 예를 들면, 11은 이 수열의 제 10항이고, 103은 이 수열의 항이 아니다. 자연수 1111은 이 수열의 몇 번째 항인가?

① 800 ② 820 ③ 900 ④ 920 ⑤ 1000

해설

$1 \sim 9 \Rightarrow 9 \times 1$개

$$\left\{\begin{array}{l} 11 \sim 19 \\ 21 \sim 29 \\ \quad\vdots \\ 91 \sim 99 \end{array}\right. \Rightarrow 9 \times 9\text{개}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 111 \sim 119 \\ 121 \sim 129 \\ \quad\vdots \\ 191 \sim 199 \end{array}\right. \Rightarrow 9 \times 9\text{개}$$

$$\vdots$$

$$\left\{\begin{array}{l} 911 \sim 919 \\ 921 \sim 929 \\ \quad\vdots \\ 991 \sim 999 \end{array}\right. \Rightarrow 9 \times 9\text{개}$$

$\therefore 9 \times 1 + 9 \times 9 \times 10 = 819$

1111은 999의 바로 다음 항

이므로 $819 + 1 = 820$

24. 수직선 위의 점 $\mathrm{P}_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 있다. 임의의 자연수 n에 대하여 두 점 P_n, P_{n+1}을 $2:1$로 내분하는 점이 P_{n+2}일 때, 점 P_{10}의 좌표는?(단, 두 점 P_1, P_2의 좌표는 각각 0, 3이다.)

① $\frac{9}{4}+\frac{1}{4\cdot 3^7}$　② $\frac{9}{4}-\frac{1}{4\cdot 3^7}$　③ $-\frac{9}{4}+\frac{1}{4\cdot 3^7}$
④ $\frac{9}{4}+\frac{1}{4\cdot 3^8}$　⑤ $\frac{9}{4}-\frac{1}{4\cdot 3^8}$

해설

점 $\mathrm{P}_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 좌표를 a_n이라 하면

$a_{n+2}=\frac{2a_{n+1}+a_n}{2+1}$, 즉 $3a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$

따라서 $a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_{n+2}-a_n)$이므로

$$a_n=0+\frac{3\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{10}=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{9}=\frac{9}{4}+\frac{1}{4\cdot 3^7}$$

25. 한 환경보호단체에서는 호수 A의 오염물질에 대한 다음과 같은 내용의 보고서를 작성하였다.

> 현재 호수 A에는 산업폐기물에 의한 250톤의 오염물질이 있다. 또한 매년 $\frac{50}{3}$톤의 요염물질이 새로 쌓인다. 이 때, 이 오염물질들은 매년 광산화 (햇빛에 의한 자연 정화)에 의하여 10%씩 줄어든다. ⋯ (이하 생략)

① 152톤　② 162톤　③ 172톤

④ 182톤　⑤ 192톤

해설

지금부터 n년 후 호수에 남이 있는 오염물질의 양을 a톤이라고 하면 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} a_1 = \left(250 + \frac{50}{3}\right) \times 0.9 = 240 \\ a_{n+1} = (a_n + \frac{50}{3}) \times 0.9 = 0.9a_n + 15 \end{cases}$$

$a_{n+1} = 0.9a_n + 15$를 변형하면

$a_{n+1} - 150 = 0.9(a_n - 150)$이므로

수열 $\{a_n - 150\}$은 첫째항이 $a_1 - 150 = 240 - 150 = 90$이고, 공비가 0.9인 등비수열이다.

즉,

$a_n - 150 = 90(0.9)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 90(0.9)^{n-1} + 150$

따라서 지금부터 20년 후 호수에 남아 있는 오염물질의 양은

$a_{20} = 90(0.9)^{19} + 150 = 90 \times 0.135 + 150 = 162.5$ (톤)