1. 두 수 48과 2사이에 10개의 수 a_1, a_2, $\cdots$,a_{10}을 넣어 12개의 수 48, a_1, a_2, $\cdots$,a_{10}, 2가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$의 값은?

① 200　② 250　③ 300　④ 350　⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은 $\frac{12(48+2)}{2} = 300$이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 300 - (48 + 2) = 300 - 50 = 250$

2. 조화수열 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\cdots$ 의 일반항은?

① $2n-1$ ② $2n+1$ ③ $\frac{3}{n}$
④ $\frac{6}{n}$ ⑤ $\frac{1}{2n+1}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이다.

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = 3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots$

등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $2n+1$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $\frac{1}{2n+1}$

3. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, $a_4 + a_7$의 값은?

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$\frac{10(2a+9d)}{2} = 120 \quad \therefore\ 2a + 9d = 24$$

$$a_4 + a_7 = (a+3d) + (a+6d) = 2a + 9d = 24$$

4. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

5. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119$,

$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$

$\therefore\ a_{10} = 119 - 98 = 21$

7. 등비중항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, $\square$안에 알맞은 수를 모두 더하면?

$-2,\ \square,\ -8,\ \square,\ \square,\ 64, \cdots$

① -11 ② -12 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b라 하면 $b^2 = (-2) \times (-8),\ b^2 = 16$
따라서 $b = 4$이고 공비는 -2인 수열이 되므로 구하는 수열은
$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ 64,\ \cdots$
$\therefore\ 4 + 16 - 32 = -12$

8. 세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, x^2+y^2의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2x=1+5=6$ $\therefore x=3$
세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2=5$
따라서 $x^2+y^2=14$

9. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, 수열 $\left\{3a_{n+1} - 2a_n\right\}$은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_n = ar^{n-1}$이므로
$\left\{3a_{n+1} - 2a_n\right\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$
$= (3ar - 2a)r^{n-1} = 12 \cdot 2^{n-1}$
따라서 $r = 2$이고 $3ar - 2a = 12$이다.
$6a - 2a = 12,\ 4a = 12$
$\therefore\ a = 3$

10. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_{10} = 48$, $S_{20} = 60$이다. 이때, S_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_{10} = \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 48 \cdots$ ㉠

$S_{20} = \dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1} = 60 \cdots$ ㉡

㉡÷ ㉠을 하면

$\dfrac{r^{20}-1}{r^{10}-1} = \dfrac{5}{4}$, $\dfrac{(r^{10}+1)(r^{10}-1)}{r^{10}-1} = \dfrac{5}{4}$

$r^{10}+1 = \dfrac{5}{4}$ $\therefore$ $r^{10} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ $S_n = \dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1} = \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1} \cdot (r^{20}+r^{10}+1)$

$= 48\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{4}+1\right) = 63$

11. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$
(10년후 원리합계)
$= 1000$만$\times 1.04^{10}$
$= 1000$만 $\times 1.48$
$= 1480$만 (원)

12. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 2n + 4$ 로 나타내어지는 수열에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 첫째항이 3, 공차가 2 인 등차수열이다.

② 첫째항이 4, 공차가 2 인 등차수열이다.

③ 첫째항이 3, 공차가 −2 인 등차수열이다.

④ 첫째항이 3, 둘째항이 1 이며, 둘째항부터는 공차가 2 인 등차수열이다.

⑤ 첫째항이 3, 둘째항이 1 이며, 둘째항부터는 공차가 −2 인 등차수열이다.

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 2n + 4 - \left\{(n-1)^2 - 2(n-1) + 4\right\} \\ &= 2n - 3 (n \geq 2) \end{aligned}$$

그런데 $a_1 = S_1 = 3$ 이므로 이 수열의 첫째항은 3 이고, 둘째항은 1 이며, 둘째항부터는 공차가 2 인 등차수열이다.

13. 수열 1, 101, 10101, 1010101, $\cdots$ 에서 제100항은?

① $\dfrac{10^{200}-1}{99}$ ② $\dfrac{10^{202}-1}{99}$ ③ $10^{201}-1$

④ $\dfrac{10^{402}-1}{99}$ ⑤ $10^{401}-1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 10^2 + 1$

$a_3 = 10^4 + 10^2 + 1$

$\vdots$

$a_n = 10^{2(n-1)} + \cdots + 10^4 + 10^2 + 1$

$= \dfrac{1\left\{(10^2)^n - 1\right\}}{10^2 - 1} = \dfrac{1}{99}(10^{2n} - 1)$

$\therefore\ a_{100} = \dfrac{1}{99}(10^{200} - 1)$

14. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$가 성립할 때, $a_4 : a_7$는? (단, $a_1 \neq 0$이다.)

① $1 : 2$ ② $1 : 3$ ③ $2 : 3$ ④ $2 : 5$ ⑤ $3 : 5$

해설

$a_3 + a_4 = 2(a_1 + a_2)$

$a + 2d + a + 3d = 2(a + a + d)$

$2a + 5d = 4a + 2d$

$3d = 2a$

$$\begin{aligned} \therefore\ a_4 : a_7 &= (a + 3d) : (a + 6d) \\ &= (a + 2a) : (a + 4a) = 3a : 5a \\ &= 3 : 5 \end{aligned}$$

15. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 제 n항까지의 합을 각각 A_n, B_n이라 한다. $A_n : B_n = (3n+6) : (7n+2)$일 때, $a_7 : b_7$을 구하면? (단, n은 자연수)

① 5 : 17 ② 15 : 31 ③ 17 : 9
④ 31 : 15 ⑤ 49 : 50

해설

a_n의 일반항을 $a+(n-1)d_1$
b_n의 일반항을 $b+(n-1)d_2$로 놓으면

$A_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d_1\}$,

$B_n = \frac{n}{2}\{2b+(n-1)d_2\}$

$\frac{2a+d_1n-d_1}{2b+d_2n-d_2} = \frac{3n+6}{7n+2} = \frac{3kn+6k}{7kn+2k}$,

$d_1 = 3k,\ 2a-d_1 = 6k$(k는 비례상수)

따라서 $2a = 9k,\ a = \frac{9}{2}k$

$\therefore\ a_n = \frac{9}{2}k+(n-1)3k$

$d_2 = 7k,\ 2b-d_2 = 2k,\ b = \frac{9}{2}k$

$\therefore\ b_n = \frac{9}{2}k+(n-1)7k$

$\therefore\ a_7 : b_7 = \left(\frac{9}{2}k+18k\right) : \left(\frac{9}{2}k+42k\right)$

$= \frac{45}{2}k : \frac{93}{2}k = 15 : 31$

16. 12나 18로 나누어떨어지지 않는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 439200

해설

구하는 총합을 S 라 하고, 세 자리의 자연수 중에서 12로 나누어 떨어지는 수의 총합을 S_{12}, 18로 나누어떨이지는 수의 총합을 S_{18}, 36으로 나누어떨이지는 수의 총합을 S_{36} 이라고 하면

$S =$ (세 자리의 자연수의 총합)

$-(S_{12}+S_{18}-S_{36})$ 이다.

이때, 세 자리의 자연수의 총합은

$100+101+\cdots+999=\dfrac{900(100+999)}{2}=494550$ 이고

$S_{12}=12\cdot 9+12\cdot 10+\cdots+12\cdot 83$

$=\dfrac{75(108+996)}{2}=41400$

$S_{18}=18\cdot 6+18\cdot 7+\cdots+18\cdot 55$

$=\dfrac{50(108+990)}{2}=27450$

$S_{36}=36\cdot 3+36\cdot 4+\cdots+36\cdot 27$

$=\dfrac{25(108+972)}{2}=13500$

이므로 구하는 총합 S 는

$494550-(41400+27450-13500)=439200$

17. 서로 다른 세 수 $x,\ y,\ z$가 차례로 등비수열을 이루고, 세 수 $x,\ 2y,\ 3z$가 차례로 등차수열을 이룰 때, $\frac{z}{x}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{4}$　　④ $\frac{1}{6}$　　⑤ $\frac{1}{9}$

해설

서로 다른 세 수 $x,\ y,\ z$가 차례로 등비수열을 이루므로

$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} \quad \therefore y^2 = xz \ \cdots\cdots$ ㉠

또한, 세 수 $x,\ 2y,\ 3z$가 차례로 등차수열을 이루므로

$4y = x + 3z \quad \therefore x = 4y - 3z \ \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$y^2 = (4y-3z)z,\ 3z^2 - 4yz + y^2 = 0$

양변을 y^2으로 나누면

$3\left(\frac{z}{y}\right)^2 - 4 \cdot \frac{z}{y} + 1 = 0$

$\left(3 \cdot \frac{z}{y} - 1\right)\left(\frac{z}{y} - 1\right) = 0$

$\therefore \frac{z}{y} = \frac{1}{3}$ 또는 $\frac{z}{y} = 1$

그런데 $y \neq z$이므로 $\frac{z}{y} = \frac{1}{3}$

즉, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로 $\frac{z}{x} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

18. $(1+2+2^2+\cdots+2^{10})(3\cdot 2^{11}+2^{12}+2^{13}+\cdots+2^{21})+2^{11}$을 간단히 하면?

① $2^{32}-1$ ② 2^{32} ③ $2^{32}+1$

④ $2^{33}-1$ ⑤ 2^{33}

해설

$1+2+2^2+\cdots+2^{10}=\dfrac{1(2^{11}-1)}{2-1}=2^{11}-1$

$3\cdot 2^{11}+2^{12}+2^{13}+\cdots+2^{21}=2^{11}+2^{12}+2^{13}+\cdots+2^{21}+2\times 2^{11}$

$=\dfrac{2^{11}(2^{11}-1)}{2-1}+2\times 2^{11}=2^{22}+2^{11}$

이므로

(주어진 식)$=(2^{11}-1)(2^{22}+2^{11})+2^{11}$

$=2^{11}(2^{11}-1)(2^{11}+1)+2^{11}$

$=2^{11}(2^{22}-1)+2^{11}=2^{33}$

19. 1부터 99까지의 홀수 중 서로 다른 10개를 택하여 그들의 합을 S라 하자. 이러한 S의 값 중 서로 다른 것을 작은 수부터 차례로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$이라 할 때, a_{100}의 값은?

① 268　② 278　③ 288　④ 298　⑤ 308

해설

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$은 공차가 2인 등차수열

$$a_1 = 1 + 3 + \cdots + 19 = \frac{10 \times 20}{2} = 100$$

$$\begin{aligned} a_{100} &= 100 + (100 - 1) \times 2 \\ &= 100 + 198 = 298 \end{aligned}$$

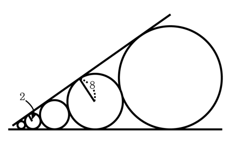
20. p는 자연수이고 2^p-1은 소수일 때, 자연수 N을 $N=2^{p-1}(2^p-1)$이라 하자. N의 모든 양의 약수의 합은?

① $2^p(2^p-1)$　　② $2^p(2^p+1)$
③ $(2^p-1)^2$　　④ $(2^p+1)^2$
⑤ $(2^p+1)(2^p-1)$

해설

2와 2^p-1이 소수이므로 $N=2^{p-1}(2^p-1)$의
양의 약수는 $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{p-1}$,
$(2^p-1),\ 2(2^p-1),\ 2^2(2^p-1),\ \cdots,\ 2^{p-1}(2^p-1)$이다.
이때, $1+2+2^2+\cdots+2^{p-1}=\dfrac{2^p-1}{2-1}=2^p-1$이고,
$(2^p-1)+2(2^p-1)+2^2(2^p-1)+\cdots+2^{p-1}(2^p-1)$
$=\dfrac{(2^p-1)(2^p-1)}{2-1}=(2^p-1)^2$
이므로 구하는 모든 양의 약수의 합은
$(2^p-1)+(2^p-1)^2=(2^p-1)(1+2^p-1)=2^p(2^p-1)$

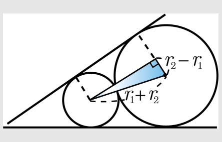
21. 오른쪽 그림과 같이 두 직선을 공통외접선으로 하는 다섯 개의 원이 서로 외접하고 있다. 두 번째와 네 번째 원의 반지름의 길이가 각각 $2, 8$일 때, 나머지 세 원의 반지름의 길이의 합은?



① 16 ② 21 ③ 25 ④ 28 ⑤ 32

해설

앞의 두 원을 자세히 그려보면



그런데 이 다섯원의 반지름은 한 직선 위에 있고
공통외접선도 동일하므로

$$\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{r_3 - r_2}{r_3 + r_2} = \cdots$$

임을 알 수 있다.
이 값을 k라 하자.
세 원의 반지름을 각각 $a,\ b,\ c$라 하면

$$\frac{b-2}{b+2} = \frac{8-b}{8+b} = k$$

$$(b-2)(8+b) = (8-b)(b+2)$$

$$2b^2 = 32$$

$$\therefore\ b = 4\ (\because b > 0)$$

$$k = \frac{8-4}{8+4} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2-a}{2+a} = \frac{1}{3} \quad \therefore a = 1$$

$$\frac{c-8}{c+8} = \frac{1}{3} \quad \therefore c = 16$$

$$\therefore a + b + c = 1 + 4 + 16 = 21$$