1. 수열 $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ \cdots$ 의 11번째 항은?

① -13 ② -10 ③ 11 ④ -11 ⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11번째 항은 11이다.

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5+a_6=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $a_6+a_7=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4\pm2\sqrt{3}}=\sqrt{3}\pm1$(복호동순), $a_5+a_7=2a_6$이므로
$(a_5+a_6)+(a_6+a_7)=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)$에서
$4a_6=2\sqrt{3}$ $\therefore$ $a_6=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. 첫째항이 -25, 공차가 3인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항 ② 제 10항 ③ 제 11항
④ 제 12항 ⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면
$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$
이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은
$3n - 28 > 0$, $3n > 28$
$\therefore\ n > \dfrac{28}{3} = 9.33\cdots$
따라서 자연수 n의 최솟값은 10이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

4. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $n \geq 3$일 때, $S_n = 94$를 만족하는 d의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$S_n = 94$에서 $\dfrac{n\{2+(n-1)d\}}{2} = 94$

$n\{2+(n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$

그런데 $n \geq 3$이므로 n의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188 이다.

$n = 4$일때, $2+(4-1)d = 47$ $\quad \therefore\ d = 15$

$n = 47$일때, $2+(47-1)d = 4$ $\quad \therefore\ d = \dfrac{2}{23}$

$n = 94$일때, $2+(94-1)d = 2$ $\quad \therefore\ d = 0$

$n = 188$일때, $2+(188-1)d = 1$ $\quad \therefore\ d = -\dfrac{1}{187}$

이 중에서 d가 자연수가 되는 것은 $n = 4$이므로 $d = 15$

5. 제 3항이 6이고 제 7항이 96인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_3 = ar^2 = 6 \cdots\cdots$ ㉠

$a_7 = ar^6 = 96 \cdots\cdots$ ㉡

㉡ $\div$ ㉠에서 $r^4 = 16$

$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \ (\because r > 0)$

㉠에 대입하면 $a = \frac{3}{2}$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2이므로 곱은 3

6. 제2항이 6, 제5항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은? (단, 공비는 실수)

① 3^9 ② $2 \cdot 3^9$ ③ 3^{10}
④ $2 \cdot 3^{10}$ ⑤ 3^{11}

해설

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_2 = ar = 6$ ······㉠
$a_5 = ar^4 = 162$ ······㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a = 2,\ r = 3$
따라서 등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3이므로 일반항 a_n은
$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
$\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$

7. 양수 a, b에 대하여 세 수 $\log 2$, $\log a$, $\log 8$이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 16이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$2\log a = \log 2 + \log 8$
$a^2 = 16, \quad \therefore\ a = 4$
$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore\ b = 8$
$a + b = 4 + 8 = 12$

8. 제 4항이 -16, 제 7항이 128인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① $\frac{1}{3}(2^{20}-1)$　② $\frac{1}{3}(1-2^{20})$　③ $\frac{1}{3}(1-2^{20})$
④ $2(1-2^{20})$　⑤ $2(1+2^{20}))$

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$ar^3=-16,\ ar^6=128$
$r^3=-8$
$\therefore\ r=-2,\ a=2$
$S_{20}=\frac{2\{1-(-2)^{20}\}}{1-(-2)}$
$=\frac{2}{3}(1-2^{20})$

9. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$1, 4, 9, 16 \cdots$

① n ② $3n-2$ ③ $2n+1$

④ n^2 ⑤ $(n+1)^2$

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \cdots$

$\therefore a_n = n^2$

10. 등차수열 $3, 7, 11, 15, \cdots$ 에 대하여 다음의 식이 성립한다.
이때, ㉠+ ㉡+ ㉢의 값을 구하여라.

$$[㉠] = \frac{3 + [㉡]}{2}$$
$$[㉡] = \frac{[㉢] + 15}{2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$7 = \frac{3 + 11}{2}$, $11 = \frac{7 + 15}{2}$ 가 성립하므로
㉠는 7, ㉡는 11, ㉢는 7 이다.
$\therefore$ ㉠ + ㉡ + ㉢ $= 7 + 11 + 7 = 25$

11. 삼차방정식 $x^3-3x^2+px+q=0$의 세 실근이 공차가 2인 등차수열을 이룰 때, $p+q$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

세 실근을 $a-d,\ a,\ a+d$라 하면
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해
$(a-d)+a+(a+d)=3$
$\therefore a=1$
$(1-d)\times 1\times(1+d)=-q$
$1-d^2=-q$
$(1-d)+(1+d)+(1-d)(1+d)=p$
$2+1-d^2=p$
$2-q=p$
$\therefore p+q=2$

12. 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 수열 $\{3a_n\}$은 공차가 9 인 등차수열이다.

㉡ 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

㉢ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

공차가 3 인 등차수열의 일반항은
$a_n = 3n + b$(단, b는 상수)

㉠ $3a_n = 9n + 3b$이므로 공차가 9 인 등차수열 ∴ 참

㉡ $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

㉢ $$\begin{aligned}\{2a_{2n} - a_{2n-1}\} &= 12n + 2b - (6n - 3 + b) \\ &= 6n + 3 + b\end{aligned}$$
이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

13. 두 실수 a, b에 대하여 a, 6, b는 이 순서대로 등차수열을 이루고, a, 4, b는 그 역수가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, a^2+b^2의 값은?

① 92 ② 94 ③ 96 ④ 98 ⑤ 100

해설

a, 6, b가 등차수열을 이루므로 $\frac{a+b}{2}=6$

$\therefore\ a+b=12\cdots$㉠

$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{b}$이 등차수열을 이루므로

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\quad\therefore\ \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}$

이때, ㉠에서

$ab=24\cdots$㉡

따라서, ㉠, ㉡에서

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=12^2-2\times24=96$

14. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = -n^2 + 5n + 6$일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ 수열 $\{S_{n+1} - S_n\}$은 등차수열이다.

ㄴ 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

ㄷ $a_n < 0,\ S_n > 0$을 동시에 만족하는 자연수 n의 개수는 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $S_{n+1} - S_n = \{-(n+1)^2 + 5(n+1) + 6\} - (-n^2 + 5n + 6) = -2n + 4$
따라서 수열 $\{S_{n+1} - S_n\}$은 공차가 -2인 등차수열이다. (참)
ㄴ $a_1 = S_1 = 10$
$n \geq 2$일 때,
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= (-n^2 + 5n + 6) - \{-(n-1)^2 + 5(n-1) + 6\}$
$= -2n + 6$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 $10,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4, \cdots$ 이므로 등차수열이 아니다. (거짓)
ㄷ $a_n < 0$에서 $-2n + 6 < 0,\ n > 3\ (\because\ a_1 = 10 > 0)$
$S_n > 0$에서 $-n^2 + 5n + 6 > 0,\ n^2 - 5n - 6 < 0$
$(n+1)(n-6) < 0,\ n < 6$
$\therefore\ 3 < n < 6$
즉, 자연수 n의 값은 4, 5의 2개이다.(참)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

15. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = x-3,\ a_2 = x,\ a_3 = x+6$이 성립할 때, a_5의 값은?

① 16 ② 24 ③ 32 ④ 48 ⑤ 52

해설

x는 $x-3$과 $x+6$의 등비중항이므로
$x^2 = (x-3)(x+6) = x^2+3x-18$
$3x = 18 \ \therefore x = 6$
즉, $a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 12$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.
$\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$

16. 첫째항부터 제3항까지의 합이 28, 첫째항부터 제 6항까지의 합이 252인 실수로 이루어진 등비수열의 제10항은?

① 2^7　② 2^8　③ 2^9　④ 2^{10}　⑤ 2^{11}

해설

첫째항을 a, 공비를 $r(r \neq 1)$라 하고, 이 등비수열의 일반항을 a_n, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_3 = \dfrac{a(r^3-1)}{r-1} = 28 \cdots\cdots$ ㉠

$S_6 = \dfrac{a(r^6-1)}{r-1} = 252 \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 변형하면

$\dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 252,$

$\dfrac{a(r^3-1)}{r-1} \cdot (r^3+1) = 252$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$28(r^3+1) = 252,\ r^3+1 = 9 \quad \therefore r^3 = 8$

r는 실수이므로 $r = 2 \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $7a = 28 \quad \therefore a = 4$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 4, 공비는 2이다.

$\therefore a_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2^{11}$

17. 수열 $8,\ 4,\ 2,\ \dfrac{1}{2},\cdots$ 에서 처음으로 $\dfrac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11항　② 제12항　③ 제13항
④ 제14항　⑤ 제15항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\dfrac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$a_n = 8 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4}$

이때, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4} < \dfrac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$n-4=10 \quad \therefore n=14$

18. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{10} = 60$, $a_{11} + a_{12} + \cdots\cdots a_{20} = 260$일 때, $a_{21} + a_{22} + \cdots\cdots + a_{30}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 460

해설

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 60$$

$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 260 + 60$$

$$\begin{cases} 2a + 9d = 12 \\ 2a + 19d = 32 \end{cases}$$

$10d = 20$

$d = 2,\ a = -3$

$$\therefore S_{30} - S_{20} = \frac{30\left\{2 \cdot (-3) + 29 \cdot 2\right\}}{2} - 320$$

$= 460$

19. 두 곡선 $y=x^3+x^2+4x$와 $y=-x^2-k$가 서로 다른 세 점에서 만나고 그 교점의 x좌표가 등비수열을 이룰 때 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x^3+x^2+4x=-x^2-k$

$x^3+2x^2+4x+k=0$

세 근이 등비수열을 이루므로

$a,\ ar,\ ar^2$ 이라 할 수 있다.

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=-2$

$a\cdot ar+a\cdot ar^2+ar\cdot ar^2=4$

$a\cdot ar\cdot ar^2=-k$

이 성립한다.

$a(1+r+r^2)=-2$

$a^2r(1+r+r^2)=4$

$ar\cdot a(a+r=r^2)=4$

$ar\cdot(-2)=4,\ ar=-2$

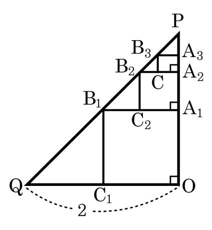
$a=\dfrac{-2}{r}$

$a^3r^3=-k$이므로

$\left(\dfrac{-2}{r}\right)^3 r^3=-k,\ -8=-k$

$\therefore k=8$

20. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=2$ 인 직각이등변 삼각형 OPQ에 정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$을 내접시킨다. 다시 직각이등변삼각형 $\mathrm{A_1PB_1}$에 정사각형 $A_1A_2B_2C_2$를 내접시킨다. 이와 같은 시행을 5회 반복할 때 만들어지는 정사각형의 넓이의 총합은?



① $\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$
② $\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$
③ $\left\{1+\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$
④ $\frac{4}{3}$
⑤ $\frac{4}{3}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$

해설

삼각형 OPQ는 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=2$ 인 직각이등변삼각형이므로 내접시킨 정사각형의 한 변의 길이는 1이다. 즉, $\overline{\mathrm{OA_1}}=1$

마찬가지로 $\overline{\mathrm{A_1A_2}}=\frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{A_3A_4}}=\frac{1}{4},\cdots$

이때, 정사각형의 넓이는 1^2, $\left(\frac{1}{2}\right)^2,\left(\frac{1}{4}\right)^4,\cdots$ 이므로 구하는 정사각형의 넓이의 합은 첫째항이 1이고, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이다.

$$\therefore\ \frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$$

21. 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n을 $S_n = 2^{n+1} - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}$의 값은?

① $\dfrac{2^{20}}{5}$ ② $\dfrac{2^{21}+5}{4}$ ③ $\dfrac{2^{21}-5}{3}$

④ 2^{20} ⑤ $2^{21}-5$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2^{n+1} - 3) - (2^n - 3) = 2^n (n \geq 2)$

$S_1 = 2^2 - 3 = 1$이므로

$\therefore\ a_n = 2^n (n \geq 2),\ a_1 = 1$

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} = 1 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{19}$

$= 1 + \dfrac{2^3\left\{(2^2)^9 - 1\right\}}{4-1}$

$= 1 + \dfrac{2^{21}}{3} - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{2^{21}}{3}$

22. $a_1 = 8,\ a_4 = 1$ 이고 각 항이 실수인 등비수열 a_n 에 대하여 수열 b_n 을 $b_n = \log_2 a_{2n}^2$ 으로 정의하면 수열 b_n 은 첫째항이 c 이고 공차가 d 인 등차수열이다. 이때, $c - d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a_4 = 8 \times r^3 = 1$ 에서 $r^3 = \frac{1}{8},\ r = \frac{1}{2}$

$a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 $a_{2n} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$

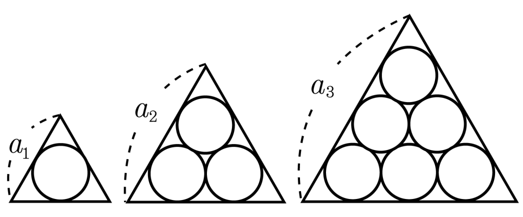
$\therefore\ b_n = \log_2 \left\{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right\}^2 = 2\log_2 2^{-2n+4}$

$= 2(-2n+4) = -4n+8$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4 이고 공차가 -4 인 등차수열이다.

$\therefore\ c - d = 8$

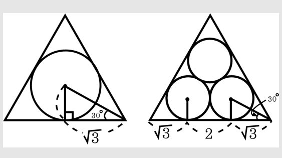
23. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1 인 원에 외접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 a_1 이라 하고, 반지름의 길이가 1 이고 서로 외접하는 세 원에 외접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 a_2 라 한다.
이와 같이 계속하여 $a_n(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 의 값을 정하면 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 20 항까지의 합은 $a + b\sqrt{3}$(a, b는 유리수) 이다. 이때, $a - b$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 340

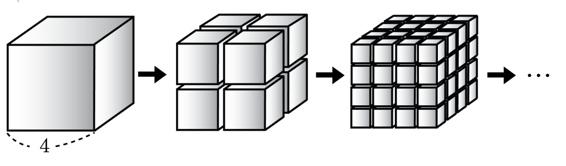
해설



$a_1 = 2\sqrt{3}$
$a_2 = 2\sqrt{3} + 2$
$a_3 = 2\sqrt{3} + 2 \times 2$
$\vdots$
$a_n = 2\sqrt{3} + 2(n - 1)$
a_n 은 첫째항이 $2\sqrt{3}$ 이고
공차가 2 인 등차수열이다.

$S_{20} = \dfrac{20(2 \cdot 2\sqrt{3} + 19 \cdot 2)}{2}$
$= 10(4\sqrt{3} + 38)$
$= 380 + 40\sqrt{3}$
$\therefore a = 380,\ b = 40$
$a - b = 340$

24. 한 변의 길이가 4인 정육면체가 있다. 다음은 이 정육면체의 각 모서리를 수직이등분하여 분리된 정육면체들을 나타낸 것이다. 이와 같은 시행을 계속해 나갈 때, 5회 시행 후 분리된 모든 정육면체의 겉넓이의 합은?



① 3×2^{10} ② 3×2^{12} ③ 3×2^{15}

④ 3×2^{17} ⑤ 3×2^{20}

해설

분리된 정육면체의 개수와 한 변의 길이는 다음 표와 같다.

	정육면체의 개수	한 변의 길이
1회 시행 후	2^3	2
2회 시행 후	2^6	1
3회 시행 후	2^9	$\frac{1}{2}$
4회 시행 후	2^{12}	$\frac{1}{4}$
5회 시행 후	2^{15}	$\frac{1}{8}$

$\therefore$ 5회 시행 후 겉넓이의 합은 $\left(\frac{1}{8}\right)^2\times6\times2^{15}=3\times2^{10}$

25. 어떤 사람이 집을 사기 위해 은행에서 생애 최초주택구입 자금 대출로 1 억원을 대출받았다. 1 년 후에 A 원을 상환하고, 그 다음 해부터는 매 1 년 마다 그 전 해에 상환한 금액에 5.2%를 추가한 금액을 상환하기로 하였다. 대출받은지 20 년 후에 마지막으로 대출 금액을 모두 상환하려고 할 때, A 의 값은?(단, 연이율 5.2% 의 복리로 계산한다.)

① 506 만원　② 514 만원　③ 518 만원
④ 522 만원　⑤ 526 만원

해설

1 억원의 20 년 후의 원리합계는 $10000(1+0.052)^{20}$(만원) 이다.
연이율 5.2% 의 복리로 계산하므로
1 년 후에 상환한 금액의 원리합계는 $A(1+0.052)^{19}$
2 년 후에 상환한 금액의 원리합계는
$A(1+0.052)\cdot(1+0.052)^{18}=A(1+0.052)^{19}$
3 년 후에 상환한 금액의 원리합계는
$A(1+0.052)^{2}(1+0.052)^{17}=A(1+0.052)^{19}$

$\vdots$

19 년 후에 상환한 금액의 원리합계는
$A(1+0.052)^{18}\cdot(1+0.052)=A(1+0.052)^{19}$
20 년 후에 상환한 금액은
$A(1+0.052)^{19}$
그런데, 1 억원의 20 년 후의 원리합계와 상환 금액의 원리합계의 합이 같아야 하므로
$10000(1+0.052)^{20}=20A(1+0.052)^{19}$
$\therefore\ A=500\times 1.052=526$(만원)