

1. 이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, α, β 의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 6$ 이므로 α, β 의 등차중항은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

2. 세 수 $-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 1

해설

$-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 등차수열을 이루면 $5 + x$ 가 등차중항
이므로

$$2(5 + x) = -7 + 2x + 5 - 4x$$

$$4x = -12$$

$$\therefore x = -3$$

3. 수열 $-3, a, b, c, 13$ 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 10

② 15

③ 20

④ 25

⑤ 30

해설

$$a - (-3) = d$$

$$b - a = d$$

$$c - b = d$$

$$13 - c = d$$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

$$\text{더하면 } 13 - (-3) = 4d \therefore d = 4$$

$$\therefore a = -3 + 4 = 1$$

$$b = 1 + 4 = 5$$

$$c = 5 + 4 = 9$$

$$\therefore a + b + c = 15$$

4. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 72$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 432

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 4a + 46d = 72$$

$$2a + 23d = 36$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} &= \frac{24(2a + 23d)}{2} \\ &= 12 \times 36 \\ &= 432\end{aligned}$$

5. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항에서 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, a_{15} 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ 일 때, } a_n &= S_n - S_{n-1} \text{ 이므로} \\ a_n &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)\{n+2-(n-1)\}}{3} \\ &= \frac{n(n+1) \cdot 3}{3} \\ &= n(n+1) \\ \therefore a_{15} &= 15 \times 16 = 240 \end{aligned}$$

6. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45

② 48

③ 49

④ 50

⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

7. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 의 값은?

① $2^{10} - 3$

② $2^{10} - 1$

③ 2^{10}

④ $2^{10} + 1$

⑤ $2^{10} + 3$

해설

$$a_n = 2^n + (-1)^n \text{에서}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9$$

$$= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots + (2^9 - 1)$$

$$= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1$$

$$= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3$$

8. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

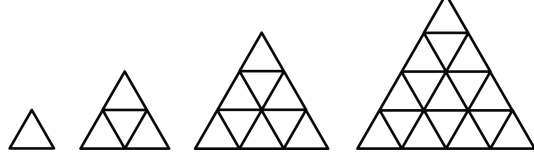
해설

$$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}, \quad S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$$

이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2) \\ &= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9) \\ &= 16 \end{aligned}$$

9. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, ... 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6 배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



- ① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$ 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 9$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = n^2$$

$$\therefore a_6 = 36$$

10. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{\log_3 a_n\}$ 은 첫째항이 0, 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이다. 이때, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4$ 의 값은?

- ① 9 ② 12 ③ 18 ④ 27 ⑤ 32

해설

$$\log_3 a_n = 0 + \frac{1}{2}(n-1)$$

$$a_n = 3^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \\ &= 3^0 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^1 \times 3^{\frac{3}{2}} \\ &= 3^{0+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}} = 3^3 = 27 \end{aligned}$$

11. 첫째항이 100이고, 공차가 -3 인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

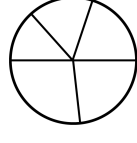
▶ 답 :

▷ 정답 : 34번째 항

해설

$$\begin{aligned}a_n &= 100 + (n - 1) \cdot (-3) \\&= -3n + 103 > 0 \\n &< 34.333 \cdots \\\therefore n &= 34 \text{ 일 때 최대}\end{aligned}$$

12. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$ 이다. 이때 k 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

각 부채꼴의 넓이를

$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ 라 하면

$$2(a - 2d) = a + 2d$$

$$2a - 4d = a + 2d$$

$$a = 6d$$

$$\therefore 4d, 5d, 6d, 7d, 8d$$

$$\text{그런데 } \frac{5(4d + 8d)}{2} = 15^2\pi$$

$$6d = 45\pi$$

$$d = \frac{15}{2}\pi$$

$$\therefore 8d = 8 \cdot \frac{15}{2}\pi = 60\pi$$

$$\therefore k = 60$$

13. 다섯 개의 수 10, a , b , c , 90은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 10, d , e , f , 90은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이때, $b+e$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

b 는 10과 90의 등차중항이므로

$$b = \frac{10 + 90}{2} = 50$$

e 는 10과 90의 등비중항이므로

$$e = \sqrt{10 \times 90} = 30 \quad \therefore b + e = 80$$

14. 서로 다른 세 수 a, b, c 가 이 순서로 등차수열을 이루고, b, a, c 가 등비수열을 이룰 때, $3a + 2b + c$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

b 는 a 와 c 의 등차중항이므로
 $2b = a + c \cdots \textcircled{㉠}$
 a 는 b 와 c 의 등비중항이므로
 $a^2 = bc \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $c = 2b - a$ 이므로 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $a^2 = b(2b - a), a^2 + ab - 2b^2 = 0$
 $(a + 2b)(a - b) = 0$
따라서 $a = -2b$ 또는 $a = b$
그런데, a, b 는 서로 다른 수 이므로 $a = -2b$
 $c = 2b - a = 2b - (-2b) = 4b$
따라서 $3a + 2b + c = -6b + 2b + 4b = 0$

15. 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_n = 4$, $S_{2n} = 12$ 이다. S_{6n} 의 값은?

① 252 ② 272 ③ 292 ④ 312 ⑤ 332

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 이라 하면

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 4 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{2n} = \frac{a(r^{2n} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^n - 1)(r^n + 1)}{r - 1} = 12 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $4(r^n + 1) = 12$

$$r^n + 1 = 3 \quad \therefore r^n = 2$$

$$\begin{aligned} S_{6n} &= \frac{a(r^{6n} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{2n} - 1)(r^{4n} + r^{2n} + 1)}{r - 1} \\ &= 12(2^4 + 2^2 + 1) = 252 \end{aligned}$$

16. 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하면
 $S_n = n^2 + kn, \log_3(T_n - 1) = n$ 이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$S_n = n^2 + kn$ 이므로
 $a_3 = S_3 - S_2$
 $(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$
 $\log_3(T_n - 1) = n$ 에서 $T_n = 3^n + 1$ 이므로
 $b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$
 $= 28 - 10 = 18$
이때, $a_3 = b_3$ 이므로 $k + 5 = 18 \quad \therefore k = 13$

17. 100 만원을 월이율 2%, 1 개월마다의 복리로 빌릴 때, 1 년 후에는 얼마를 갚아야 하는가?(단, $1.02^{12} = 1.2682$)

- ① 1258200 원 ② 1268200 원 ③ 1278200 원
④ 1288200 원 ⑤ 1298200 원

해설

$$\begin{aligned} S &= 1000000(1 + 0.02)^{12} = 10^6 \times 1.02^{12} \\ &= 10^6 \times 1.2682 = 1268200(\text{원}) \end{aligned}$$

18. 등차수열 $85, x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, 100, y_1, y_2, \dots, y_q, 105$ 의 합이 2375가 되도록 하는 p, q 의 값은?

- ① $p = 11, q = 3$ ② $p = 12, q = 4$ ③ $p = 15, q = 3$
④ $p = 16, q = 4$ ⑤ $p = 17, q = 5$

해설

(i) 두 수열 $85, x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, 100$ 과 $100, y_1, y_2, \dots, y_q, 105$ 는 공차가 같은 등차수열이므로

$$100 = 85 + (p + 1)d, 105 = 100 + (q + 1)d$$

$$\frac{100 - 85}{p + 1} = \frac{105 - 100}{q + 1}$$

$$15(q + 1) = 5(p + 1) \quad \therefore p = 3q + 2$$

(ii) 주어진 수열은 첫째항이 85, 끝항이 105, 항수가 $p+q+3$ 인 등차수열이고, 그 합이 2375이므로 $\frac{(p+q+3)(85+105)}{2} = 2375$

$$p + q + 3 = 25 \quad \therefore p + q = 22 \cdots \text{㉠}$$

이때, (i)에서 $p = 3q + 2$ 이므로 이것과 ㉠을 연립하여 풀면 $p = 17, q = 5$

19. 어떤 관광버스가 갈 때는 a km/h의 속력으로, 올 때는 b km/h의 속력으로 운행하였다. 이때, 이 버스가 왕복 운행하는 동안의 평균 속력은?

① $\frac{ab}{a+b}$
④ $\frac{2ab}{2(a+b)}$

② $\frac{2ab}{a+b}$
⑤ $\frac{2(a+b)}{ab}$

③ $\frac{2b}{2(a+b)}$

해설

버스가 운행하는 두 지점 사이의 거리를 s km라고 하면 왕복거리는 $2s$ km이고, 갈 때는 $\frac{s}{a}$ 시간, $\frac{s}{b}$ 시간이 걸리므로 구하는 평균

속력을 v 라고 하면

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{a} + \frac{s}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

20. 첫째항이 31, 공차가 -2인 등차수열에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 220인 모든 n 의 값의 합은?

① 10

② 22

③ 32

④ 44

⑤ 56

해설

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2 \cdot 31 + (n-1) \cdot (-2)\}}{2} \\ &= n\{31 - (n-1)\} \\ &= n(32-n) \\ &= -n^2 + 32n = 220 \end{aligned}$$

$\therefore n$ 의 값의 합은 32

21. 첫째항이 1000이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 곱을 Π_n , 즉, $\Pi_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ 이라 할 때, Π_n 이 최대가 될 때의 n 의 값은?

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

해설

첫째항이 1000이고, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 1000 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

어떤 수에 1보다 큰 값을 곱하면 곱은 커지고, 1보다 작은 값을 곱하면 곱이 작아지므로

$a_n \geq 1$ 인 모든 항들을 곱할 때 Π_n 은 최댓값을 갖는다.

따라서, $a_n = 1000 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 에 대하여

$$\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \text{이므로}$$

$n-1 \leq 9$, 즉, $n \leq 10$ 일 때, $a_n \geq 1$ 을 만족한다.

그러므로 Π_n 이 최대가 될 때의 n 의 값은 10이다.

22. a, b, c 는 $1 < a < b < c < 9$ 인 정수이고, 수열 $0.a, 0.0b, 0.00c, \dots$ 가 등비수열일 때, 이 수열의 제 4항은?

- ① $0.00\dot{1}\dot{5}$
- ② $0.00\dot{1}\dot{6}$
- ③ $0.001\dot{6}$
- ④ $0.001\dot{7}$
- ⑤ $0.00\dot{1}\dot{7}$

해설

$$0.\dot{a} = \frac{a}{9}, \quad 0.0\dot{b} = \frac{b}{90}, \quad 0.00\dot{c} = \frac{c}{900} \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{b}{90}\right)^2 = \frac{a}{9} \times \frac{c}{900} \text{ 에서 } b^2 = ac$$

즉, a, b, c 는 이 순서로 등비수열을 이루고

$1 < a < b < c < 9$ 인 정수이므로 $a = 2, b = 4, c = 8$ 이다.

따라서 이 수열은 $\frac{2}{9}, \frac{4}{90}, \frac{8}{900}, \dots$ 이므로

첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{2}{10}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore a_4 = \frac{16}{9000} = 0.001\dot{7}$$

23. 다음과 같이 나열된 수를 보고 이 수열의 여섯번째에 올 수를 구하면?

$$\frac{\sqrt{3}}{1}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{5}, \dots$$

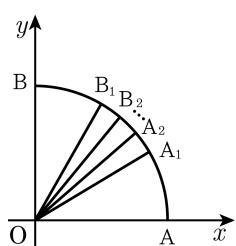
- ① $\frac{\sqrt{7}}{12}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{12}$
- ③ $\frac{\sqrt{13}}{11}$
- ④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$
- ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며,
분자는 $\sqrt{\quad}$ 의 수가 2씩 증가하는 규칙으로 나타난다.
따라서 6번째에 올 수의 분자는 $\sqrt{13}$ 이다.
분모는 2씩 증가하는 규칙으로 나타난다.
따라서 6번째에 올 수 수의 분모는 11이므로

구하는 수는 $\frac{\sqrt{13}}{11}$

24. 그림과 같이 사분원 AOB에 대하여 $\angle AOB$ 를 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_1, B_1 이라 하고, $\angle A_1OB_1$ 을 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_2, B_2 라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속할 때, $\angle A_{10}OB$ 의 크기는?



- ① $\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3^9}\right)$ ② $\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{3^9}\right)$ ③ $\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right)$
 ④ $\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{3^{10}}\right)$ ⑤ $\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{3^{11}}\right)$

해설

$$\angle A_{10}OB = \frac{\pi}{2} - \angle A_{10}OA$$

$$\begin{aligned} \angle A_{10}OA &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 \\ &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \angle A_{10}OB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right)$$

$$\therefore \angle A_{10}OB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right) = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{3^{10}}\right)$$

25. 어떤 카드회사는 영업 전략의 일환으로 포인트 제도를 운영하고 있다. 이 회사는 12개월 이상 카드 이용 실적이 있는 고객 중에서 포인트가 만점 이상이 되면 포인트를 현금으로 돌려준다. 포인트 적립은 사용 금액 100원당 1점씩이고, 이용한 개월 수가 늘어날 때 전달까지 누적 포인트의 1% 씩을 더 적립해 준다면 매달 같은 금액을 사용한다는 조건에서 한 달에 최소한 얼마나 써야 12개월 후에 현금을 받을 수 있는가? (단, $1.01^{12} = 1.13$ 으로 계산하고, 요금의 최소 단위는 천 원이다.)

- ① 70000 원
- ② 73000 원
- ③ 75000 원

- ④ 77000 원
- ⑤ 80000 원

해설

매달 사용액을 a 원이라 하면 이때의 포인트는 $\frac{a}{100}$ 점이 된다.
이용 개월 수가 늘어남에 따라 누적 포인트의 1%가 추가 적립
되므로 12개월 후의 누적 포인트 S 는
$$S = \frac{a}{100} + \frac{a}{100}(1 + 0.01) + \cdots + \frac{a}{100}(1 + 0.01)^{11}$$
$$= \frac{\frac{a}{100} \{ (1.01)^{12} - 1 \}}{1.01 - 1} = \frac{\frac{a}{100} (1.13 - 1)}{0.01} \geq 10000$$
$$\frac{a}{100} \times 0.13 \geq 100$$
$$\therefore a \geq 76923. \times \times \times$$
따라서 한 달에 최소한 77000 원을 써야 한다.