1. 수열 $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ \cdots$ 의 11번째 항은?

① -13 ② -10 ③ 11 ④ -11 ⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11번째 항은 11이다.

2. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{20}의 값은?

① 38 ② 39 ③ 41 ④ 42 ⑤ 43

해설

$a_{20} = S_{20} - S_{19}$

$S_{20} = 20^2 + 40 - 1 = 439,$

$S_{19} = 19^2 + 38 - 1 = 398$

$\therefore \ a_{20} = 439 - 398 = 41$

3. 제3 항이 11, 제9 항이 29 인 등차수열의 20 번째 항은?

① 60　　② 62　　③ 64　　④ 66　　⑤ 68

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3 = a + 2d = 11 \cdots$ ㉠

$a_9 = a + 8d = 29 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = 5,\ d = 3$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3 이므로 일반항 a_n은

$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$

따라서 20 번째 항은 $3 \times 20 + 2 = 62$

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5 ② 8 ③ 11 ④ 13 ⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

5. 세 수 $5-2x,\ 4-x,\ 6+3x$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$5-2x,\ 4-x,\ 6+3x$가 등차수열을 이루면 $4-x$가 등차중항이므로

$$4-x=\frac{(5-2x)+(6+3x)}{2}$$

$$2(4-x)=5-2x+6+3x$$

$$8-2x=11+x$$

$$-3x=3 \quad \therefore\ x=-1$$

6. 수열 -3, a, b, c, 13이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$a-(-3)=d$
$b-a=d$
$c-b=d$
$13-c=d$
좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리
더하면 $13-(-3)=4d$ $\therefore d=4$
$\therefore a=-3+4=1$
$b=1+4=5$
$c=5+4=9$
$\therefore a+b+c=15$

7. 조화수열 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\cdots$ 의 일반항은?

① $2n-1$　② $2n+1$　③ $\frac{3}{n}$
④ $\frac{6}{n}$　⑤ $\frac{1}{2n+1}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라고 하면,
$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이다.
$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = 3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots$
등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $2n+1$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $\frac{1}{2n+1}$

8. 첫째항이 1, 공비가 8 인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = \log_2 a_n$ 으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 10 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 135

해설

$a_n = 8^{n-1} = (2^3)^{n-1} = 2^{3n-3}$

$b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{3n-3}$

b_n은 첫째항이 0, 공차가 3 인 등차수열

$$\therefore S_{10} = \frac{10\left\{2 \cdot 0 + (10-1) \cdot 3\right\}}{2} = 5 \cdot 27 = 135$$

9. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

10. 다음 보기의 수열 중 등비수열인 것은?

보기

㉠ $\{2n+1\}$　　㉡ $\{n^2\}$

㉢ $\{3^{n+1}\}$　　㉣ $\{5 \cdot 3^{n-2}\}$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉡, ㉢　④ ㉡, ㉣　⑤ ㉢, ㉣

해설

등비수열은 ar^{n-1} 의 꼴로
나타낼 수 있는 수열이므로

㉢ $3^{n+1} = 3^2 \cdot 3^{n-1}$
첫째항 $= 3^2$, 공비$= 3$

㉣ $5 \cdot 3^{n-2} = \frac{5}{3} \cdot 3^{n-1}$
첫째항$= \frac{5}{3}$, 공비$= 3$

11. 수열 $\omega,\ \omega^3,\ \omega^5,\ \omega^7,\ \cdots$ 의 첫째항부터 제 36 항까지의 합을 구하여라.
$(\omega^3 = 1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

첫째항이 ω, 공비가 ω^2, 항수가 36 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{\omega\left\{(\omega^2)^{36} - 1\right\}}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1}$$

이때, $\omega^3 = 1$ 이므로

$\omega^{72} = (\omega^3)^{24} = 1^{24} = 1$

$$\therefore\ S = \frac{\omega(\omega^{72} - 1)}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega(1 - 1)}{\omega^2 - 1} = 0$$

12. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$의 값은?

① 110　② 120　③ 122　④ 132　⑤ 140

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$
$= \sum_{k=1}^{10}(a_k^3+3a_k^2+3a_k+1) - \sum_{k=1}^{10}(a_k^3-3a_k^2+3a_k-1)$
$= \sum_{k=1}^{10}(6a_k^2+2) = 6\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2$
$= 6 \times 20 + 2 \times 10 = 140$

13. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$　　② $\frac{2n}{n+1}$　　③ $\frac{n}{2n+1}$
④ $\frac{n}{n+2}$　　⑤ $\frac{2n}{2n+1}$

해설

준 식) $= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right\}$

$= \frac{1}{2} \cdot \left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right\} + \cdots + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{n}{2n+1}$

14. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26　② 31　③ 36　④ 46　⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$
$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$
$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

15. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

> (i) $P($(가)$)$ 이 참이다.
> (ii) $P(k)$ 가 참이면 $P($(나)$)$ 도 참이다.

이때, (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k　② 0, $k+1$　③ 0, $k-1$
④ 1, k　⑤ 1, $k+1$

해설

명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.
(i) $P(\boxed{1})$ 이 참이다.
(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(\boxed{k+1})$ 도 참이다.

16. 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 수열 $\{3a_n\}$은 공차가 9 인 등차수열이다.

㉡ 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

㉢ 수열 $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\}$은 공차가 6 인 등차수열이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉢　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

공차가 3 인 등차수열의 일반항은
$a_n = 3n + b$(단, b는 상수)

㉠ $3a_n = 9n + 3b$이므로 공차가 9 인 등차수열 ∴ 참

㉡ $a_{2n-1} = 3(2n-1) + b = 6n - 3 + b$이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

㉢ $\{2a_{2n} - a_{2n-1}\} = 12n + 2b - (6n - 3 + b)$
$= 6n + 3 + b$
이므로 공차가 6 인 등차수열 ∴ 참

17. $a_1 = 1,\ a_{10} = 37$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10} - a_1 = a_1 + 9d - a_1 = 9d = 36 \ \therefore d = 4$

이때, $a_{n+1} - a_n = d = 4$이므로

$(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$

$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99})$

$= 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 50 = 200$

18. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6,\ a_5 = -2$일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 284

해설

공차를 d라 하면

$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore\ d = -2$

$\therefore\ a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$

이때, $a_n \geq 0$에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| = a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$

$= 2 \cdot \dfrac{4(6+0)}{2} - \dfrac{20(6-32)}{2} (\because\ a_4 = 0,\ a_{20} = -32)$

$= 24 + 260 = 284$

19. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_{10}=48$, $S_{20}=60$이다. 이때, S_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_{10}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=48\cdots$ ㉠

$S_{20}=\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=60\cdots$ ㉡

㉡÷ ㉠을 하면

$\dfrac{r^{20}-1}{r^{10}-1}=\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{(r^{10}+1)(r^{10}-1)}{r^{10}-1}=\dfrac{5}{4}$

$r^{10}+1=\dfrac{5}{4}\quad\therefore\ r^{10}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ S_n=\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}\cdot(r^{20}+r^{10}+1)$

$=48\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{4}+1\right)=63$

20. 첫째항이 1 이고, 공비가 4 인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000 보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4 인 등비수열이므로

$S_n = \dfrac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000$, $4^n > 3001$

$2n \log 2 > \log 3001$

$n > \dfrac{\log 3001}{2 \log 2} > \dfrac{\log 3000}{2 \log 2}$

$= \dfrac{\log 3 + \log 1000}{2 \log 2} = \dfrac{3.4771}{0.6020} = 5.7\times\times\times$

21. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$
(10년후 원리합계)
$=$ 1000만$\times 1.04^{10}$
$=$ 1000만 $\times 1.48$
$=$ 1480만(원)

22. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2S_n$으로 정의될 때, a_{10}의 값은? (단, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$)

① $3 \cdot 2^8$ ② $3 \cdot 2^9$ ③ $3 \cdot 2^{10}$

④ $2 \cdot 3^9$ ⑤ $2 \cdot 3^{10}$

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이므로 $S_{n+1} - S_n = 2S_n$
즉, $S_{n+1} = 3S_n$이므로 $\{S_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이다.
$\therefore\ S_n = 3^n$
$a_{10} = S_{10} - S_9 = 3^{10} - 3^9 = 2 \cdot 3^9$

해설

$a_1 = 3,\ a_2 = 6$
$a_{n+1} = 2S_n \cdots$ ㉠, $a_n = 2S_{n-1} \cdots$ ㉡
㉠식에서 ㉡식을 빼보면,
$a_{n+1} - a_n = 2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n$(단, $n \geq 2$)
$a_{n+1} = 3a_n$(단, $n \geq 2$)
따라서 $a_n = 3^{n-2} \cdot a_2 = 2 \cdot 3^{n-1}$(단, $n \geq 2$)
$\therefore\ a_{10} = 2 \cdot 3^9$

23. 수열 $1\cdot2\cdot4,\ 2\cdot4\cdot8,\ 3\cdot6\cdot12,\ 4\cdot8\cdot16, \cdots$ 의 제 10항까지의 합은?

① 400　② 1100　③ 12100
④ 24200　⑤ 48400

해설

$a_k = k\cdot 2k\cdot 4k = 8k^3$ 이므로

$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} 8k^3 = 8\cdot\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2 = 2\cdot 10^2\cdot 11^2 = 24200$

24. $x_i \in \{0,\ 1,\ 2\}$ 이고, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 20$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 34$ 일 때, $\sum_{i=1}^{n} x_i^3$ 의 값은?

① 62　　② 74　　③ 86　　④ 98　　⑤ 110

해설

x_i 중 1을 a개, 2를 b개 택한다면

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \times a + 2 \times b = 20 \quad \therefore a + 2b = 20 \cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1^2 \times a + 2^2 \times b = 34 \quad \therefore a + 4b = 34 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = 6,\ b = 7$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 1^3 \times 6 + 2^3 \times 7 = 6 + 56 = 62$

25. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, $\sum_{k=1}^{5} ka_k$의 값은?

① 110 ② 125 ③ 145 ④ 160 ⑤ 180

해설

$S_n = n^2 + 2n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$

$= 2n + 1(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$

$n = 1$ 일 때,

$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

따라서

$a_n = 2n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이므로

$\sum_{k=1}^{5} ka_k = \sum_{k=1}^{5} k(2k+1)$

$= \sum_{k=1}^{5}(2k^2 + k) = 2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k$

$= 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} = 125$

26. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^3 - n$인 수열 $\{a_n\}$에서 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$의 값은?

① $\frac{17}{19}$ ② $\frac{17}{30}$ ③ $\frac{19}{40}$ ④ $\frac{17}{50}$ ⑤ $\frac{19}{60}$

해설

$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^3 - n) - \left\{(n-1)^3 - (n-1)\right\} = 3n(n-1) (n \geq 2)$

$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3n(n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) (n \geq 2)$

$\therefore \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$

$= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right)\right\}$

$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{20}\right) = \frac{19}{60}$

27. 수열 $\{a_n\}$이 $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$ 일 때, 계차수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n = \alpha^n$이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \beta^n + \gamma$이다. 이때, 실수 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots$

$\quad\ \ \bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee$

$\quad\ \ 2\ \ \ 4\ \ \ 8\ \ \ 16\ \ \cdots \rightarrow b_n = 2^n$

$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$= 1 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$

$\alpha = 2,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 3$

28. 오른쪽 그림과 같이 수를 배열할 때 위에서 10 번째 행, 왼쪽에서 7번째 열의 수는?

1	2	4	7	11	$\cdots$
3	5	8	12		
6	9	13			
10	14				
15					
$\vdots$					

① 130　　② 138　　③ 142

④ 152　　⑤ 146

해설

각 행의 첫 번째 수로 만들어지는 수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$$\{a_n\} : 1,\ \ 3,\ \ 6,\ \ 10,\ \ 15,\ \ \cdots$$
$$\bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee\ \ \bigvee$$
$$2\ \ \ 3\ \ \ 4\ \ \ 5\ \ \cdots$$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \dfrac{n^2+n}{2}$

각 행을 이루는 수열들을 살펴보면 모두 계차수열을 이루고, 제 10행은 각 항의 계차가 10, 11, 12, $\cdots$ 인 계차수열을 이룬다. 따라서 제10행의 첫 번째 수는

$a_{10} = \dfrac{10^2+10}{2} = 55$이고

제10행의 7번째 열의 수는

$55 + (10+11+12+13+14+15)$

$= 55 + \dfrac{6(10)+15)}{2} = 130$

29. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{40} a_k$ 의 값은?

(가) $a_{4n} = n^2(n \geq 1)$ (나) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}(n \geq 1)$

① 210 ② 385 ③ 420 ④ 560 ⑤ 770

해설

(나) 에서 $a_1 + a_2 + a_3 = a_4,\ a_5 + a_6 + a_7 = a_8, \cdots$ 이므로

$\sum_{k=1}^{40} a_k = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40})$

$= 2a_4 + 2a_8 + 2a_{12} + \cdots + 2a_{40}$

$= 2\sum_{k=1}^{10} a_{4k} = 2\sum_{k=1}^{10} k^2(\because(가))$

$= 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 770$

30. 수열 $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$,에 대하여 몇 번째 항에서 처음으로 7이 나오는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

군으로 나눠 보면

$1/\ 1,\ 2/1,\ 2,\ 3/\ 1,\ 2,\ 3,\ 4/\cdots$

1군은 1

2군은 1, 2

3군은 1, 2, 3이므로

7군은 1, 2, 3, $\cdots$, 7

(6까지의 항의 총수)$= 1 + 2 + \cdots + 6 = 21$

$21 + 7 = 28$(번째 항)

31. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ 에서 제 20항은?

① $\frac{9}{64}$　② $\frac{11}{64}$　③ $\frac{9}{32}$　④ $\frac{19}{32}$　⑤ $\frac{21}{32}$

해설

분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

제1군　제2군　제3군

$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \cdots\cdots$

제 n군까지의 항수는

$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

따라서, 제 4군까지 항수는 15개이므로 구하는 제 20항은 제5군의 제5항이다.

한편, 제 n군의 제 m항은 $\frac{2m-1}{2^n}$ 이므로

제5군의 제5항은 $\frac{9}{2^5} = \frac{9}{32}$

32. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10 행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행				1			
제2행			3	5	7		
제3행		9	11	13	15	17	
제4행	19	21	23	25	27	29	31
⋮				⋮			

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.

$\underset{\text{제1군}}{\underline{(1)}}, \underset{\text{제2군}}{\underline{(3,\ 5,\ 7)}}, \underset{\text{제3군}}{\underline{(9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17)}}, \cdots$ 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 9,\ 19, \cdots$

$\{b_n\} : 2,\ 6,\ 10, \cdots$

$\therefore b_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$

$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-2) = 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$

이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10 행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는

$163 + (5-1) \times 2 = 171$

33. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 다음을 만족한다.

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ 에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$

$\therefore a_n = a_1 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{5} \times \cdots \times \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-1}{n+1}$ $\therefore a_{10} = 110 \times$

$= 110 \times \dfrac{2}{n(n+1)}$

$\dfrac{2}{110} = 2$

34. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족할 때, 일반항 a_n을 구하면?

① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$에서
$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
$a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
이때, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 3인 등비수열이고,
$b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$이므로
$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로
$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$
$= 1 + \dfrac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$

35. $a_1 = p,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{a_n + 1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의되는 수열이 있다. 다음 중 임의의 양수 p에 대하여 $a_n = p$가 되도록 하는 n의 값은?

① 20　② 21　③ 22　④ 23　⑤ 24

해설

$a_1 = p,\ a_2 = -\dfrac{1}{p+1},$

$a_3 = \dfrac{-1}{-\dfrac{1}{p+1} + 1} = -\dfrac{p+1}{p},$

$a_4 = \dfrac{-1}{-\dfrac{p+1}{p} + 1} = p,\ a_5 = -\dfrac{1}{p+1}, \cdots$

$\therefore a_1 = a_4 = a_7 = \cdots = a_{22} = a_{25} = \cdots = p$

즉, $n = 3k + 1(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$이면 $a_n = p$이다.

$\therefore a_{22} = p$

36. 같은 크기의 통나무를 맨 아래 단에 $2n$ 개를 놓고, 위로 올라가면서 1 개씩 줄여서 n 단이 되도록 쌓으려고 한다. 그림은 맨 아래 단에 6 개를 놓고 3 단으로 통나무를 쌓은 것이다. 이와 같은 방법으로 맨 아래 단에 30 개를 놓고 15 단을 쌓을 때, 필요한 통나무의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 345 개

해설

통나무의 개수는 맨 아래 단부터 30, 29, 28, $\cdots$ 이고, 모두 15 단이 있으므로 첫째항이 30, 공차가 -1, 항의 개수가 15 인 등차수열의 항을 이룬다.
따라서 전체 통나무의 개수는

$$\frac{15 \cdot \{2 \cdot 30 + 14 \cdot (-1)\}}{2} = 345(\text{개})$$

37. 다섯 개의 실수 a, b, c, d, e를 적당히 배열하여 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다. a, b, c, d, e가 다음 조건을 만족시킬 때, b가 이 수열의 제 n항이라 하면 n의 값은?

(가) $e = \sqrt{cd}$
(나) $\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$
(다) $a < b$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

조건 (가)에서 $e = \sqrt{cd}$이므로 $e^2 = cd$, 즉, e는 c, d의 등비중항이므로 c, e, d 또는 d, e, c의 순서대로 등비수열을 이룬다.
조건 (나)에서 $\frac{a}{e} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = ce$이므로 a, c, e, d 또는 d, e, c, a의 순서대로 등비수열을 이룬다.
조건 (다)에서 $a < b$이므로 a, c, e, d, b 또는 d, e, c, a, b이므로 b는 항상 제 5항이다.

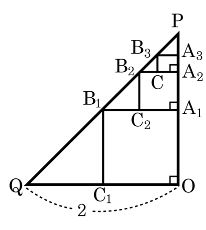
38. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 $2,\ \frac{a^2}{2},\ b$가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $a+2,\ b,\ 1$이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a^2+b^2의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$a^2 = 2 + b,\ b^2 = a + 2$ 이므로
$a^2 - b^2 = b - a$
$a^2 - b^2 + a - b = 0$
$(a-b)(a+b+1) = 0$
$a \neq b$이므로 $a+b+1=0$
$a = -1 - b,\ b = -1 - a$
$a^2 = 2 - 1 - a = -a + 1$
$b^2 = -1 - b + 2 = -b + 1$
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= -(a+b) + 2 \\ &= -(-1) + 2 = 3 \end{aligned}$$

39. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OQ}} = 2$ 인 직각이등변삼각형 OPQ에 정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$을 내접시킨다. 다시 직각이등변삼각형 $\mathrm{A_1PB_1}$에 정사각형 $A_1A_2B_2C_2$를 내접시킨다. 이와 같은 시행을 5회 반복할 때 만들어지는 정사각형의 넓이의 총합은?



① $\dfrac{3}{4}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}$　② $\dfrac{4}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\right\}$

③ $\left\{1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\right\}$　④ $\dfrac{4}{3}$

⑤ $\dfrac{4}{3}\left\{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}$

해설

삼각형 OPQ는 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OQ}} = 2$ 인 직각이등변삼각형이므로 내접시킨 정사각형의 한 변의 길이는 1이다. 즉, $\overline{\mathrm{OA_1}} = 1$

마찬가지로 $\overline{\mathrm{A_1A_2}} = \dfrac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{A_3A_4}} = \dfrac{1}{4}, \cdots$

이때, 정사각형의 넓이는 1^2, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2, \left(\dfrac{1}{4}\right)^4, \cdots$ 이므로 구하는 정사각형의 넓이의 합은 첫째항이 1이고, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이다.

$$\therefore \frac{1 \cdot \left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$$

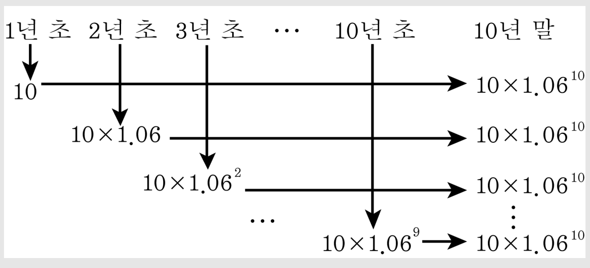
40. 정부가 통일 이후 필요한 비용을 마련하기 위해 예산의 일부를 2015년부터 매년 1월 1일 적립한다고 하자. 적립할 금액은 경제성장률을 감안하여 매년 전년도보다 6% 씩 증액한다. 2015년 1월 1일부터 10조원을 적립하기 시작한다면 2024년 12월 31일 까지 적립된 금액의 원리합계는 몇 조원인지 구하여라. (단, 연이율 6%, 1년마다의 복리로 계산하고 $1.06^{10} = 1.8$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 180

해설

2015년 1월 1일 적립금이 10조원이므로 n년 후의 적립금은 10×1.06^n(조원)이다.



따라서 구하는 적립금의 원리합계는
$10 \times 10 \times 1.06^{10} = 10 \times 10 \times 1.8 = 180$(조원)

41. 수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n = 2n$일 때, 새로운 수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 만들었다.

$b_n = \left[\frac{a_n}{10}\right]$

이때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제100항 까지의 합을 구하여라.(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 970

해설

$a_n = 2n$일 때, 수열 $\{b_n\}$을 구해 보면 $b_n = \left[\frac{a_n}{10}\right]$에서

$b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0,\ b_4 = 0,$

$b_5 = 1,\ b_6 = 1,\ b_7 = 1,\ b_8 = 1,\ b_9 = 1$

$b_{10} = 2,\ b_{11} = 2,\ b_{12} = 2,\ b_{13} = 2,\ b_{14} = 2,$

$\vdots$

$b_{95} = 19,\ b_{96} = 19,\ b_{97} = 19,\ b_{98} = 19,\ b_{99} = 19,$

$b_{100} = 20$

따라서 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제100항까지의 합은

$5(1 + 2 + 3 + \cdots + 19) + 20 = 5 \times \frac{19(1 + 19)}{2} + 20$

$= 970$

42. 다음 중 수열 $\{a_n\}$이 조화수열임을 나타내는 식이 아닌 것은?

① $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} =$(일정한 수)

② $\frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$

③ $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} = 0$

④ $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2a_n \cdot a_{n+2}}$

⑤ $a_n = \frac{1}{pn+q}$(단, $pq \neq 0$)

해설

①, ②, ③, ⑤는 모두 $\{a_n\}$이 조화수열임을 나타내는 식이다. ④는 조화수열을 나타내는 식이 아니다. 조화수열을 나타내는 식은 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$이다.

43. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n$인 관계가 성립할 때, 이 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{2}(3^{10}-1)$ ② $3^{10}-1$ ③ $\frac{3}{2}(3^{10}-1)$
④ $2(3^{10}-1)$ ⑤ $\frac{5}{2}(3^{10}-1)$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$이므로 $r = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$S_{10} = \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1} = \dfrac{3(3^{10}-1)}{3-1}$

$= \dfrac{3}{2}(3^{10}-1)$

44. 수열 $\{a_n\}$이 $a_n + S_n = n$과 같이 정의될 때, 일반항 a_n은?(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$)

① $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$　② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$　③ $3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
④ $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$　⑤ $2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

해설

$a_1 + S_1 = 1,\ S_1 = a_1$ 이므로 $2a_1 = 1$

$\therefore\ a_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} + S_{n+1} = n+1 \\ -) & a_n + S_n \quad = n \\ \hline & a_{n+1} - a_n + a_{n+1} = 1 \end{array}$$

에서 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1)(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이때, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $-\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$a_n - 1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　$\therefore\ a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

45. 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$이 성립하고 $a_6 = 62$라 할 때, $a_1 + a_2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ 에서

$a_3 = a_1 + a_2$

$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_2) = a_1 + 2a_2$

$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$

$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$

$\therefore\ 3a_1 + 5a_2 = 62$

$a_1,\ a_2$의 값은 자연수이고 $a_1 < a_2$이므로

$a_1 = 4,\ a_2 = 10$

$\therefore\ a_1 + a_2 = 14$

46. 다음과 같이 나열된 수를 보고 이 수열의 여섯번째에 올 수를 구하면?

$$\frac{\sqrt{3}}{1},\ \frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{\sqrt{7}}{5},\ \cdots$$

① $\frac{\sqrt{7}}{12}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{\sqrt{13}}{11}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며,
분자는 $\sqrt{\ }$의 수가 2씩 증가하는 규칙으로 나타난다.
따라서 6번째에 올 수의 분자는 $\sqrt{13}$이다.
분모는 2씩 증가하는 규칙으로 나타난다.
따라서 6번째에 올 수 수의 분모는 11이므로
구하는 수는 $\frac{\sqrt{13}}{11}$

47. 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수로 이루어진 수열의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① 2250　② 2500　③ 2750　④ 3000　⑤ 3250

해설

4로 나눈 나머지가 3인 자연수는 $4l-1$(단, $l \geq 0$인 정수) 의 꼴이고,
6으로 나눈 나머지가 5인 자연수는 $6m-1$(단, $m \geq 0$인 정수) 의 꼴이다.
따라서, 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수를 x라고 하면
$x = 4l - 1 = 6m - 1$을 만족해야 하므로 $x + 1 = 4l = 6m$
즉, $x + 1 = 12n$, 즉, $x = 12n - 1$($n \geq 1$ 인 정수)
따라서 조건을 만족하는 수열은 $11,\ 23,\ 35, \cdots$ 로 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로 첫째항부터 제 20항까지의 합은
$\dfrac{20(2 \cdot 11 + 19 \cdot 12)}{2} = 2500$

48. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 의 값이 한 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수는?

$$a_1=\sqrt{3+2\sqrt{2}},\ a_2=\sqrt{5+2\sqrt{6}},\ a_3=\sqrt{7+2\sqrt{12}},\cdots$$

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$a_1=1+\sqrt{2}$
$a_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
$a_3=\sqrt{3}+\sqrt{4}$
$\vdots$
$a_n=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$
$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
$S_n=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+$
$\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
$S_n=\sqrt{n+1}-1$ 이 한자리 자연수가 되어야 한다.
$S_3=\sqrt{4}-1=1$
$S_8=\sqrt{9}-1=3-2=2$
$\vdots$
$S_{120}=\sqrt{121}-1=11-1=10$
$\therefore$ 9개

49. 다음은 수열의 합

$S = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} \cdots\cdots (1)$

을 계산하는 과정이다. 이때, ㉠ ~㉤에 들어갈 것으로 알맞지 않은 것은?

> $S - xS$ 를 하면
>
> $$\begin{array}{rl} S = & 1 + 2x + 3x + \cdots + (n-1)x^{n-2}\ nx^{n-1} \\ -)\quad xS = & \\ \hline (1-x)S = & (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) - \text{㉡} \end{array}$$
>
> (i) $x \neq 1$ 일 때,
>
> (우변)$= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) - \text{㉡}$
>
> $= \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{\text{㉢}}$
>
> $\therefore S = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n-1}}{\text{㉣}}$
>
> (ii) $x = 1$ 일 때, (1) 에서
>
> $S = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + \cdots + n \cdot 1^{n-1}$
>
> $\therefore S =$ ㉤

① ㉠ $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^{n-1}$

② ㉡ nx^n

③ ㉢ $1 - x$

④ ㉣ $(1-x)^2$

⑤ ㉤$n(n+1)$

해설

⑤ ㉤ $\dfrac{n(n+1)}{2}$

50. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다. $\square$안에 알맞은 수를 구하여라.

(i) $n=1$일 때
(좌변)$= \frac{1}{(2\times 1-1)(2\times 1+1)} = \frac{1}{3}$
(우변)$= \frac{1}{2\times 1+1} = \frac{1}{3}$ 이므로
등식은 성립한다.
(ii) $n=i\ (i>1)$일 때 등식이 성립한다고 가정하면
$\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{i}{2i+1}$
등호의 양변에 $\frac{1}{(2i+1)(2i+\square)}$ 을 더하면
(좌변)
$= \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$
$= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$
(우변)
$= \frac{i}{2i+1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$
$= \frac{(i+1)(2i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{i+1}{2i+3} = \frac{i+1}{2(i+1)+1}$
따라서, $n=i+1$일 때 등식은 성립한다.
그러므로 (i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모두 자연수 n에 대하여 성립한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) $n=1$일 때
(좌변)$= \frac{1}{(2\times 1-1)(2\times 1+1)} = \frac{1}{3}$
(우변)$= \frac{1}{2\times 1+1} = \frac{1}{3}$ 이므로
등식은 성립한다.
(ii) $n=i\ (i>1)$일 때 등식이 성립한다고 가정하면
$\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{i}{2i+1}$
등호의 양변에 $\frac{1}{(2i+1)(2i+\boxed{3})}$ 을 더하면
(좌변)
$= \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$
$= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$
(우변)
$= \frac{i}{2i+1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)}$
$= \frac{(i+1)(2i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{i+1}{2i+3} = \frac{i+1}{2(i+1)+1}$
따라서, $n=i+1$일 때 등식은 성립한다.
그러므로 (i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모두 자연수 n에 대하여 성립한다.