1. 평행이동 $f:(x, y) \to (x-1,\ y+3)$ 에 의하여 점 $(3,\ 1)$ 은 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(2,\ 4)$　② $(4,\ 2)$　③ $(2,\ -4)$
④ $(-2,\ 4)$　⑤ $(4,\ -2)$

해설

f는 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 $+3$ 만큼 평행이동하는 변환이므로 $(3-1,\ 1+3)=(2,\ 4)$로 옮겨진다.

2. 점 $(2,\ -3)$을 점 $(-1,\ 2)$로 옮기는 평행이동을 T라 할 때, 점 $(-2,\ 5)$는 T에 의하여 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(1,\ 0)$　② $(-5,\ 10)$　③ $(-3,\ 5)$
④ $(5,\ 10)$　⑤ $(3,\ -5)$

해설

평행이동 T는 x축의 방향으로 -3, y 축의 방향으로 $+5$ 만큼 평행이동 하는 변환이므로
$(-2-3,\ \ 5+5) = (-5,\ 10)$으로 옮겨진다.

3. 점 P를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(3,\ -5)$라 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(0,\ -3)$ ② $(-3,\ 0)$ ③ $(6,\ -7)$
④ $(-7,\ 6)$ ⑤ $(-6,\ 7)$

해설

$P(a,\ b)$를 조건에 의하여 이동하면 $(a+3,\ b-2)=(3,\ -5)$
따라서 $a=0,\ b=-3$

4. $y = x^2 - 2x + 3$ 을 평행이동 $f : (x, y) \to (x + 2, y - 1)$ 에 의하여 옮겨진 도형의 방정식은?

① $y = x^2 + 2x + 4$ ② $y = x^2 + 2x + 2$

③ $y = x^2 + 2x + 3$ ④ $y = x^2 - 6x + 8$

⑤ $y = x^2 - 6x + 10$

해설

$f : (x, y) \quad \to \quad (x + 2, y - 1)$ 에서

$x + 2 = x', y - 1 = y'$ 라 하자.

$x = x' - 2 \quad y = y' + 1$ 을 주어진 식에 대입하면,

$y' + 1 = (x' - 2)^2 - 2(x' - 2) + 3$

$y' = x'^2 - 6x' + 10$ 에서 $y = x^2 - 6x + 10$

5. 직선 $y = 3x - 3$의 그래프를 직선 $y = x$에 대칭이동한 직선의 방정식은?

① $y = 3x + 1$　② $y = \frac{1}{3}x + 1$　③ $y = -\frac{1}{3} + 1$
④ $y = \frac{1}{3}x - 1$　⑤ $y = 3x - 1$

해설

$y = x$ 대칭은 $x \to y$ 좌표로, $y \to x$를 대입한다.

6. 점 $(-1,2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시켰다. 이것을 x 축으로 a, y 축으로 b 만큼 평행이동시킨 후 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(1,2)$ 가 되었다. $a+b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

점$(-1,\ 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동하면 $(-1,-2)$
이것을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(1,-2)$
이것을 다시 x 축으로 a,
y 축으로 b 만큼 평행이동하면
$(1+a,\ -2+b)$
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1-a,\ 2-b)$
이것이 점 $(1,2)$ 가 되려면 $a=-2,\ b=0$
$\therefore a+b=-2$

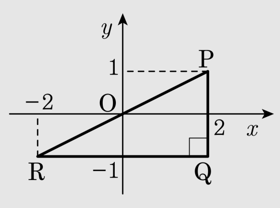
7. 점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle$PQR 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한
점 Q 는 Q (2, −1)
또, 점 P (2, 1) 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 R 는 R (−2, −1)
따라서, 다음 그림에서 세 점 P (2, 1) , Q (2, −1) , R (−2, −1) 을 꼭짓점으로 하는$\triangle$PQR 의 넓이는



$$\frac{1}{2}\times4\times2=4$$

8. 직선 $2x-3y+6=0$ 을 점 $(4,-3)$ 에 대하여 대칭이동한 다음, 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $x-y-5=0$
② $2x-4y-9=0$
③ $3x-2y-40=0$
④ $2x-y-21=0$
⑤ $6x-3y-29=0$

해설

직선 $2x-3y+6=0$ 을 점 $(4,-3)$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$2(8-x)-3(-6-y)+6=0$
즉, $2x-3y-40=0$
이것을 다시 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$2(-y)-3(-x)-40=0$
$\therefore 3x-2y-40=0$

9. 다음 도형 중 y 축에 대하여 대칭인 도형의 방정식은?

① $(x-1)^2+y^2=9$ ② $2x^2-y-5=0$
③ $2x-3y+1=0$ ④ $x-2y+2=0$
⑤ $3(x+1)^2+2y-1=0$

해설
y 축에 대해 대칭이면 $f(x)=f(-x)$ 이므로
x 에 $-x$ 를 넣어도 식에 변화가 없다.
$\Rightarrow$ ② : $2x^2-y-5=0$

10. 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 도형이 되었다. 이때 $2m-n$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$,
즉 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$을
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼
평행이동한 도형은 중심이 $(-1+m,\ 2+n)$이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
이때 두 원이 직선 $y=x$에 대칭이므로
$(-1+m,\ 2+n)=(2,\ -1)$
$m=3,\ n=-3$이므로 $2m-n=9$

11. 두 점 $A(1,\ 2)$, $B(7, 10)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원 C_1 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원을 C_2 라고 하자. 두 $C(0, -3)$, $D(a,\ b)$ 가 원 C_2 의 지름의 양 끝일 때, $a+b$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

원 C_1 의 중심은 선분 AB 의 중점과 같으므로
이 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+10}{2}\right)$, 즉, $(4, 6)$
한 편, 원 C_2 의 중심은 원 C_1 의 중심을 x 축에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(4, -6)$ 이다.
이 때, 선분 CD 의 중점이 원 C_2 의 중심과 같으므로 $\left(\frac{0+a}{2}, \frac{-3+b}{2}\right)$ 는 $(4, -6)$ 과 같다.
따라서, $\frac{0+a}{2} = 4$ 에서 $a = 8$
$\frac{-3+b}{2} = -6$ 에서 $b = -9$
$\therefore a+b = -1$

12. 직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 (1, 1) 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -34

해설

직선 $5x+12y+k=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $5y+12x+k=0$

즉, $12x+5y+k=0$

이 직선과 점 $(1,1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|12\cdot 1+5\cdot 1+k|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$$

$$\frac{|17+k|}{13}=2$$

$|k+17|=26$

$k+17=\pm 26$

$\therefore k=9$ 또는 $k=-43$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은

$9+(-43)=-34$

13. 원 $x^2+y^2+4x-2y=0$ 과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 다른 한 원은
서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2+y^2=5$ 이다.
원 $(x+2)^2+(y-1)^2=5$ 와 $x^2+y^2=5$가
직선 $y=ax+b\cdots$①에 대하여
대칭이므로 직선 ①은 점 $(-2,1)$과 점 $(0,0)$ 을 잇는 선분을
수직이등분한다.
따라서 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ 은 직선 ①위에 있고
기울기의 곱은 -1 이다.
$\frac{1}{2}=-a+b$, $\frac{1}{-2}\times a=-1$
$\therefore\ a=2,\ b=\frac{5}{2}$
따라서 $a\times b=2\times\frac{5}{2}=5$

14. 직선 $3x-2y+6=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 4)$ 와 대칭인 점 Q 의 좌표를 구하면?

① $\mathrm{Q}(-1,\ 2)$ ② $\mathrm{Q}(-1,\ 3)$ ③ $\mathrm{Q}(-1,\ 4)$
④ $\mathrm{Q}(-1,\ 6)$ ⑤ $\mathrm{Q}(-1,\ 8)$

해설

$\mathrm{Q}(\mathrm{a},\ \mathrm{b})$ 라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점

$\left(\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{b+4}{2}\right)$은 직선 $3x-2y+6=0$ 위에 있으므로

$3\times\dfrac{a+5}{2}-2\times\dfrac{b+4}{2}+6=0$

$\rightarrow 3a+15-2b-8+12=0$

$\rightarrow 3a-2b=-19\cdots$①

또, 주어진 직선과 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 는 서로 직교하므로

기울기의 곱$=-1$ 이 된다.

$\therefore\ \dfrac{b-4}{a-5}\times\dfrac{3}{2}=-1\rightarrow 3b-12=-2a+10$

$\rightarrow 2a+3b=22\cdots$②

① 과 ② 를 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=8$

$\therefore\ \mathrm{Q}(-1,\ 8)$

15. 다음 중 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{2}$

② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

④ $(x+1)^2+y^2=2$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 1 인 ②이다.

16. 점 $(1,\ 2)$ 를 점 $(a,\ b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,
$(x-m)+2(y-n)-1=0$, $x+2y-m-2n-1=0$을
$x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,
$-m-2n=-3\ \cdots$ ㉠
점 $(1,\ 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,
$(1+m,\ 2+n)$
$\Rightarrow\quad 1+m=a,\quad 2+n=b$
$\Rightarrow\quad a+2b=m+1+4+2n=8$
($\because$ ㉠에서 $m+2n=3$)

17. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$인 원을 x축 방향으로 a 만큼 y축 방향으로 b 만큼 평행이동하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=4$ ② $a^2+b^2=9$ ③ $a^2+b^2=16$
④ $a^2+b^2=25$ ⑤ $a^2+b^2=36$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=9 \cdots$ ㉠
원 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$\{(x-a)+3\}^2+\{(y-b)-2\}^2=9$
$\{x-(a-3)\}^2+\{y-(b+2)\}^2=9 \cdots$ ㉡
원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.
$\therefore\ d=\sqrt{(a-3+3)^2+(b+2-2)^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2}=3+3=6$
$\therefore\ a^2+b^2=36$

18. 원점에 대하여 대칭 이동하였을 때, 자기 자신과 일치하는 도형의 방정식을 <보기>에서 모두 고르면?

<보기>

㉠ $y=-x$ ㉡ $|x+y|=1$

㉢ $x^2+y^2=2(x+y)$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $y=-x$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은 $-y=-(-x)$ 이다.

㉡ $|x+y|=1$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은 $|-x-y|=1$ 이므로 $|x+y|=1$

㉢ $x^2+y^2=2(x+y)$ 를 원점에 대하여 대칭 이동 한 도형의 방정식은 $(-x)^2+(-y)^2=2(-x-y)$ 이므로 $x^2+y^2=-2(x+y)$

19. 점 $(5,\ 3)$ 을 지나는 직선을 y 축 방향으로 1 만큼 평행이동 시킨 후, 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰을 때, 이동된 직선이 점 $(-10, -5)$ 를 지난다고 한다. 이 때, 이동되기 전의 직선의 방정식은?

① $y = 2x + \frac{1}{2}$　　② $y = \frac{1}{5}x + 2$　　③ $y = \frac{1}{3}x - 2$

④ $y = 4x + 1$　　⑤ $y = \frac{2}{5}x - 3$

해설

구하는 직선의 기울기를 m 이라 하면

$y - 3 = m(x - 5)$

$y = mx - 5m + 3 \cdots$ ㉠

㉠을 y 축 방향으로 1 만큼 평행이동시키면

$y - 1 = mx - 5m + 3$

$\therefore y = mx - 5m + 4 \cdots$ ㉡

㉡를 다시 원점에 대하여 대칭이동시키면

$-y = -mx - 5m + 4$

$\therefore y = mx + 5m - 4 \cdots$ ㉢

㉢의 그래프가 점 $(-10,\ -5)$ 를 지나므로

$-5 = -10m + 5m - 4 \therefore m = \frac{1}{5}$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = \frac{1}{5}x + 2$

20. 직선 $y = kx+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2+6x-4y+9 = 0$ 의 넓이를 이등분한다고 할 때 k 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

먼저 $y = kx + 1$ 를 x 축 대칭시킨 직선은
$y = -kx - 1 \cdots$ ㉠
이제 원의 방정식을 정리하면,
$(x + 3) + (y - 2)^2 = 4$
직선이 원의 넓이를
이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
중심이 $(-3, 2)$ 이므로 ㉠ 에 대입하면,
$2 = 3k - 1 \Rightarrow \quad k = 1$