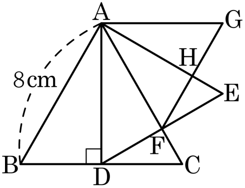
1. 다음 그림은 크기가 다른 정삼각형 3 개를 겹쳐 그린 것이다. 가장 큰 정삼각형 ABC 의 한 변의 길이가 8 cm 일 때, 가장 작은 정삼각형 AFG 의 넓이를 구하여라.



① $7\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ② $8\sqrt{2}\,\text{cm}^2$

③ $8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ④ $9\sqrt{2}\,\text{cm}^2$

⑤ $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

해설

1) $\overline{\text{AD}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}\ (\text{cm})$

$\overline{\text{AF}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 6\ (\text{cm})$

2) $\triangle\text{AFG}$ 는 한 변의 길이가 6 cm 인 정삼각형이므로 $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$ 이다.

$\therefore\ \triangle\text{AFG} = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

2. 한 변의 길이가 4 cm 인 정육각형에 내접하는 원의 넓이는?

① $4\pi\ \mathrm{cm}^2$　② $8\pi\ \mathrm{cm}^2$　③ $12\pi\ \mathrm{cm}^2$

④ $16\pi\ \mathrm{cm}^2$　⑤ $24\pi\ \mathrm{cm}^2$

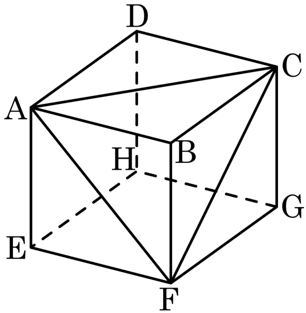
해설

정육각형을 6 개의 정삼각형으로 나누면 한 변의 길이가 4 cm 인 정삼각형이 되고 정삼각형의 높이가 원의 반지름이 되기 때문에

$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$ (cm) 이다.

따라서 원의 넓이는 $(2\sqrt{3})^2\pi = 12\pi$ (cm^2) 이다.

3. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12cm인 정육면체를 점 A, C, F를 지나는 평면으로 잘랐을 때, 점 B에서 밑면인 삼각형 AFC에 내린 수선의 길이를 구하여라.



① $2\sqrt{3}$cm　② $3\sqrt{3}$cm　③ $4\sqrt{3}$cm　④ $5\sqrt{3}$cm　⑤ $6\sqrt{3}$cm

해설

$\overline{AC} = \overline{AF} = \overline{CF} = 12\sqrt{2}(\text{cm})$

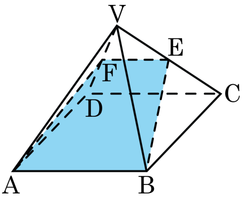
$\triangle ACF = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (12\sqrt{2})^2 = 72\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

수선의 길이를 h라 하면 사각뿔 B – AFC의 부피에서

$72\sqrt{3} \times h \times \dfrac{1}{3} = 12 \times 12 \times \dfrac{1}{2} \times 12 \times \dfrac{1}{3}$

$h = \dfrac{12 \times 12 \times 6}{72\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}(\text{cm})$

4. 다음 그림과 같이 모서리의 길이가 모두 8 cm 인 정사각뿔에서 $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ 의 중점을 각각 E, F 라고 할 때, □ABEF 의 넓이를 구하면?



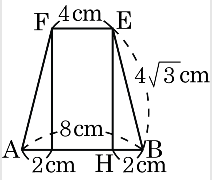
① $11\sqrt{10}\,\text{cm}^2$　② $12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

③ $12\sqrt{6}\,\text{cm}^2$　④ $12\sqrt{11}\,\text{cm}^2$

⑤ $24\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

해설

$\overline{AF} = \overline{BE}$, $\overline{EF}//\overline{AB}$ 이므로 □ABEF 는 등변사다리꼴이다.



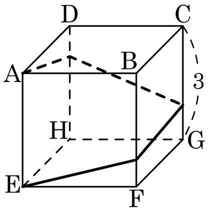
$\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ (∵ 중점 연결 정리)

$\overline{BE}$, $\overline{AF}$ 는 한 변의 길이가 8 cm 인 정삼각형의 높이이므로 $\overline{BE} = \overline{AF} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$

사다리꼴의 높이 $\overline{EH} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{11}(\text{cm})$ 이다.

$\therefore$ □ABEF $= (8+4) \times 2\sqrt{11} \times \frac{1}{2} = 12\sqrt{11}(\text{cm}^2)$

5. 다음 그림과 같은 정육면체의 한 꼭짓점 E 에서 모서리 BF, CG, DH 를 순서대로 지나 점 A 에 이르는 선 중에서 가장 짧은 선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

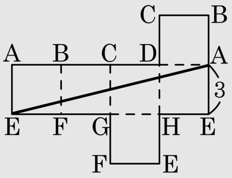
▷ 정답 : $3\sqrt{17}$

해설

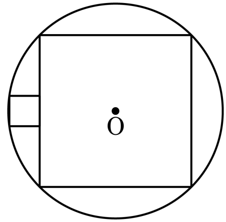
위의 그림에서 점 E 에서 모서리 BF, CG, DH 를 순서대로 지나 점 A 에 이르는 가장 짧은 선은 $\overline{EA}$ 가 된다.

$\overline{EA}^2 = 3^2 + 12^2 = 153$

$\therefore\ \overline{EA} = 3\sqrt{17}$



6. 다음 그림과 같이 두 정사각형의 한 변이 붙어 있으면서 원 O 에 내접하고 있다. 큰 정사각형의 한 변의 길이가 10 일 때, 작은 정사각형의 넓이를 구하여라.

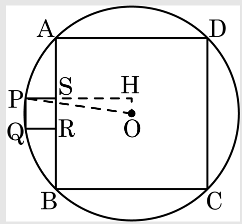


▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

다음 그림과 같이 원의 중심 O 에서 $\overline{\mathrm{PS}}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$\overline{\mathrm{AC}} = 10\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}} = 5\sqrt{2}$

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하면

$\overline{\mathrm{OH}} = \frac{x}{2}$, $\overline{\mathrm{PH}} = x + 5$ 이므로

$\triangle\mathrm{POH}$ 에서

$(x+5)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$

$x^2 + 10x + 25 + \frac{x^2}{4} = 50$

$x^2 + 8x - 20 = 0$

$\therefore\ x = 2\ (x > 0)$

따라서 작은 정사각형의 넓이는 4 이다.

7. 삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 할 때, $\overline{\mathrm{AG}}=5$, $\overline{\mathrm{BG}}=12$, $\overline{\mathrm{CG}}=13$ 을 만족한다. 이때 변 AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$\overline{\mathrm{CG}}$ 의 연장선이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 와 만나는 점을 M 이라 하면 $\overline{\mathrm{CM}}$ 은 중선이므로

$$\overline{\mathrm{GM}}=\frac{13}{2}$$

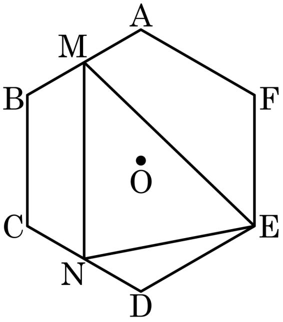
따라서 $\triangle$ABG 에서 파푸스의 정리에 의해

$$5^2+12^2=2\left\{\left(\frac{13}{2}\right)^2+\overline{\mathrm{AM}}^2\right\}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AM}}=\frac{13}{2}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=13$ 이다.

8. 다음과 같이 정육각형 ABCDEF 에서 변 AB, CD 의 중점을 각각 M, N 이라 하면 삼각형 EMN 의 넓이가 27 일 때, 정육각형 ABCDEF 의 넓이를 구하여라.

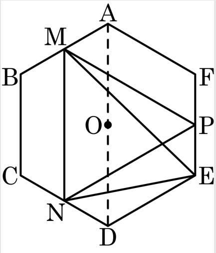


▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

정육각형의 한 변의 길이를 a 라 하자.
다음 그림과 같이 선분 AD 를 그으면 □ABCD 는 등변사다리꼴이므로 $\overline{BC} = a$, $\overline{AD} = 2a$ 이다.



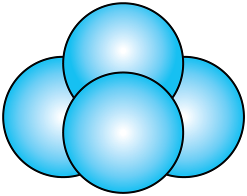
따라서 사다리꼴의 중점연결 정리에 의하여 $\overline{MN} = \frac{1}{2}(a+2a) = \frac{3}{2}a$ 이다.

$\overline{EF}$ 의 중점을 P 라 할 때, $\overline{EF} \,/\!/\, \overline{MN}$ 이므로 $\triangle MNP = \triangle MNE$, $\triangle MNP$ 는 한 변의 길이가 $\frac{3}{2}a$ 인 정삼각형이므로 $\triangle MNP = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{16}a^2$

$\therefore\ \triangle EMN = \frac{9\sqrt{3}}{16}a^2 = 27$, $a^2 = 16\sqrt{3}$

정육각형 ABCDEF 는 한 변의 길이가 a 인 정삼각형 6 개로 나누어지므로 정육각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 16\sqrt{3} = 72$ 이다.

9. 다음 그림과 같이 한 개의 평면 위에 반지름이 2 인 세 개의 구를 2 개씩 외접하도록 놓고 그 위에 반지름이 같은 구를 한 개 더 놓는다. 이 때, 4 개의 구의 중심을 꼭짓점으로 하는 입체의 부피는?

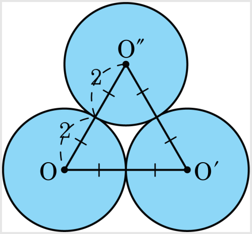


① $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　　② $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}$　　③ $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$

④ $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$　　⑤ $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

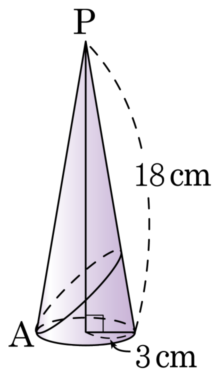
해설

반지름이 2 인 세 개의 구의 중심을 이은 도형은 길이가 4 인 정삼각형이므로 4 개의 구의 중심을 꼭짓점으로 하는 입체는 정사면체이다.



따라서 정사면체의 부피는 $\dfrac{\sqrt{2}}{12} \times 4^3 = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ 이다.

10. 다음 그림과 같이 모선의 길이가 18cm , 밑면의 원의 반지름의 길이가 3cm 인 원뿔이 있다. 밑면의 한 점 A 에서 옆면을 지나 다시 점 A 로 되돌아오는 최단거리는?

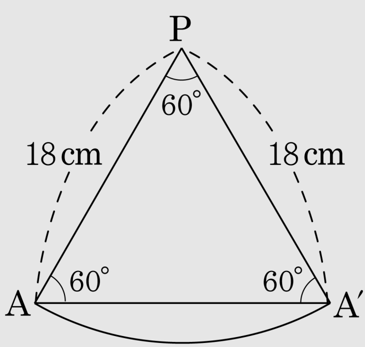


① 15cm
② $15\sqrt{2}$cm
③ 18cm
④ $18\sqrt{2}$cm
⑤ $18\sqrt{3}$cm

해설

전개도에서 부채꼴의 중심각의 크기는

$\frac{3}{18} \times 360° = 60°$,



삼각형 PAA′ 은 정삼각형이므로

최단 거리 $\overline{AA'} = 18\,\text{cm}$ 이다.