

1. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

- ① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.
- ② $\sqrt{(-3)^2} = -3$
- ③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.
- ④ $|x + y| = |x - y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.
- ⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

- ① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ④ $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x + y)^2 = (x - y)^2$
 $\leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
- ⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

2. 다음 중 명제의 대우가 참인 것은?

- ① x 가 유리수이면 x^2 은 유리수이다.
- ② 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다.
- ③ $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다.
- ④ 닮음인 두 삼각형은 합동이다.
- ⑤ x 또는 y 가 무리수이면 $x + y$ 가 무리수이다.

해설

명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

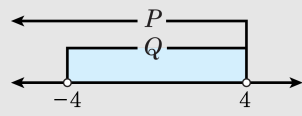
3. $x < 4$ 는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4, q : -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

4. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $|a| = |b|$ 는 $a = b$ 이기 위한 (가)조건이다.
 - 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나)조건이다.

- ① 필요, 필요

② 필요, 충분

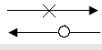
③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a| = |b|$



$a = b \therefore$ 필요

$\{x \mid x \text{는 } 3\text{의 배수}\} \supset \{x \mid x \text{는 } 6\text{의 배수}\} \therefore$ 필요

5. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $1 < x \leq 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가)조건이다.
 - $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나)조건이다.

- ① 필요, 필요

② 필요, 충분

③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$P = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$,
 $Q = \{x \mid x > -2\}$ 라고 하면
 $P \subset Q$, $\therefore$ 충분조건
 $R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\}$,
 $S = \{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\} = \{2\}$ 라고 하면
 $R = S$, $\therefore$ 필요충분조건

6. 자연수 n 에 대하여 2^{4n} , 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

- ① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$
④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

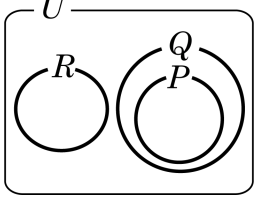
$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

7. 실수 x, y, z 에 대하여 조건 ' $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ' 의 부정과 서로 같은 것은?
- ① $x = y = z = 0$
 - ② $x = 0$ 또는 $y = 0$ 또는 $z = 0$
 - ③ $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이고 $z \neq 0$
 - ④ $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 또는 $z \neq 0$
 - ⑤ $x \neq 0$ 이고 $y = 0$ 이고 $z = 0$

해설

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ 의 부정은 $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ 이다.
 $\therefore x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 또는 $z \neq 0$

8. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, 이들 사이의 포함 관계는 다음 그림과 같다. 다음 명제 중 거짓인 것은?



- ① $r \rightarrow \sim q$ ② $r \rightarrow \sim p$ ③ $p \rightarrow \sim r$
 ④ $\sim q \rightarrow \sim p$ ⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

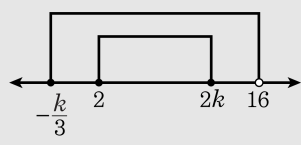
명제의 참, 거짓은 각각의 조건을 만족하는 집합의 포함 관계로 판별할 수 있다.

① $R \subset Q^c$ 이므로 $r \rightarrow \sim q$ 는 참이다.
 ② $R \subset P^c$ 이므로 $r \rightarrow \sim p$ 는 참이다.
 ③ $P \subset R^c$ 이므로 $p \rightarrow \sim r$ 는 참이다.
 ④ $Q^c \subset P^c$ 이므로 $\sim q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.
 ⑤ $P \not\subset Q^c$ 이므로 $p \rightarrow \sim q$ 는 거짓이다.

9. 두 조건 $p: 2 \leq x \leq 2k$, $q: -\frac{k}{3} \leq x < 16$ 에 대하여 ‘ p 이면 q 이다.’가 참이 되도록 하는 정수 k 의 개수는? (단, $k \geq 1$)

① 7개 ② 8개 ③ 12개 ④ 15개 ⑤ 16개

해설



$-\frac{k}{3} \leq 2 \rightarrow k \geq -6, 2k < 16 \rightarrow k < 8, 1 \leq k < 8$ 이므로
정수 k 의 개수는 7개

10. $p : |x - 1| \leq h$, $q : |x + 2| \leq 7$ 에 대하여 ‘ p 이면 q 이다’ 가 참이 되도록 하는 h 의 최댓값은? (단, $h \geq 0$)

- ① 4 ② 5 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $|x - 1| \leq h$ 에서 $-h \leq x - 1 \leq h$ 이므로
 $-h + 1 \leq x \leq h + 1$
또 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면
 $|x + 2| \leq 7$ 에서 $-7 \leq x + 2 \leq 7$ 이므로
 $-9 \leq x \leq 5$
 $P \subset Q$ 이어야 하므로
 $-h + 1 \geq -9$ 에서
 $h \leq 10$
 $h + 1 \leq 5$ 에서 $h \leq 4$
따라서 $0 \leq h \leq 4$ 이므로 h 의 최댓값은 4

13. 세 수 2^{60} , 3^{40} , 5^{30} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $5^{30} < 3^{40} < 2^{60}$

② $3^{40} < 2^{60} < 5^{30}$

③ $3 < 5^{30} < 2^{60}$

④ $2^{60} < 5^{30} < 3^{40}$

⑤ $2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

해설

$$\frac{2^{60}}{3^{40}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{20} = \left(\frac{8}{9}\right)^{20} < 1 \text{ 따라서 } 2^{60} < 3^{40}$$

$$\frac{3^{40}}{5^{30}} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^{10} = \left(\frac{81}{125}\right)^{10} < 1 \text{ 따라서 } 3^{40} < 5^{30}$$

$$\therefore 2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$$

14. 임의의 실수 x, y 에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립할 조건을 구하면?

① $a > 20, b > 25$

② $a \geq 20, b > 25$

③ $a > 20, b = 25$

④ $a = 20, b > 25$

⑤ $a = 20, b < 25$

해설

$$x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + b > 0$$

$$\frac{D}{4} = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$$

$$(20 - a)y + 25 - b < 0$$

이것이 임의의 실수 y 에 대하여 항상 성립할 조건은

$$20 - a = 0, 25 - b < 0$$

$$\therefore a = 20, b > 25$$

15. 부등식 $x^2 + (a+1)x + (a+1) \geq 0$ 이 절대부등식이 되기 위한 정수 a 의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$$D = (a+1)^2 - 4(a+1) \leq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a^2 + 2a + 1 - 4a - 4$$

$$= a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 의 개수는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 으로 5개

16. 두 조건 p, q 가 $p : |x| < a, q : |x - 1| \geq 3$ 과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참일 때, 양수 a 의 범위를 구하면?

- ① $0 < a \leq 4$ ② $a > 4$ ③ $a \geq 4$
 ④ $a > 2$ ⑤ $2 \leq a \leq 4$

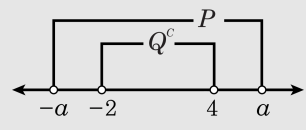
해설

$$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow Q^c \subset P$$

$$P = \{x | -a < x < a\}$$

$$Q = \{x | x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 4\}$$

$$Q^c = \{x | -2 < x < 4\}$$



$$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2, a \geq 4$$

$$\therefore a \geq 4$$

17. 명제 ‘ $|x - 1| < 1$ 이면 $|x - 1| \leq 2$ 이다.’의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 고른 것은?

- ① 대우
- ② 역, 이
- ③ 이, 대우
- ④ 역, 대우
- ⑤ 역, 이, 대우

해설

$\{x \mid |x - 1| < 1\} = \{x \mid 0 < x < 2\}$
 $\{x \mid |x - 1| \leq 2\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$
역 : $|x - 1| \leq 2$ 이면 $|x - 1| < 1$ 이다.
 $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\} \not\subset \{x \mid 0 < x < 2\}$ 이므로 거짓이다.
이 : $|x - 1| \geq 1$ 이면 $|x - 1| > 2$ 이다.
 $\{x \mid x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2\} \not\subset \{x \mid x < -1 \text{ 또는 } x > 3\}$ 이므로 거짓이다.
대우 : $|x - 1| > 2$ 이면 $|x - 1| \geq 1$ 이다.
 $\{x \mid x < -1 \text{ 또는 } x > 3\} \subset \{x \mid x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2\}$ 이므로 참이다.

18. 두 명제「겨울이 오면 춥다.」, 「추우면 눈이 온다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은 ?
- ① 눈이 오지 않으면 춥지 않다.
 - ② 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
 - ③ 겨울이 오면 눈이 온다.
 - ④ 눈이 오면 겨울이 온다.
 - ⑤ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다.
라 하면 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이다.
① $q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim q$ (대우 명제)
② $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (대우 명제)
③ $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로
 $p \Rightarrow r$ (삼단논법)
④ $p \Rightarrow r$ 이라 해서 반드시 $r \Rightarrow p$ 인 것은 아니다.
⑤ $p \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$ (대우명제)

19. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「 $x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제 ‘ $x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이다’의 대우인 ‘(가)이면 $x^2 + y^2 \neq 1$ 이다’가 참임을 증명하면 된다.
(가)에서 $x^2 + y^2 > 1$ 이므로 $x^2 + y^2 \neq 1$ 가 성립한다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다)이다.

- ① $x > 1$ 이고 $y > 1$, 1, 참
- ② $x > 1$ 이고 $y > 1$, 2, 참
- ③ $x > 1$ 또는 $y > 1$, 2, 참
- ④ $x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$, 1, 거짓
- ⑤ $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$, 2, 거짓

해설

$x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 의 부정은 $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이다.
 x, y 가 모두 1보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

20. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B)^c = B - A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

- ① $A \cap B = \emptyset$
- ② $A \cup B = U$
- ③ $A \subset B^c$
- ④ $A^c \cup B = U$
- ⑤ $A = B^c$

해설

$(A - B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$, $B - A = A^c \cap B$
 $A^c \cup B = A^c \cap B$ 에서 $A^c = B$
즉, $A = B^c$

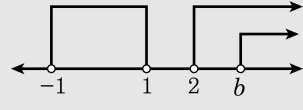
21. $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 $x > a$ 은 필요조건이고 $x > b$ 는 충분조건일 때 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

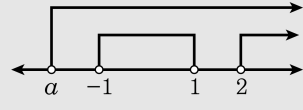
해설

$x > b$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 충분조건에서



$$\therefore b \geq 2$$

$x > a$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 필요조건에서



$$\therefore a \leq -1$$

$\therefore a$ 의 최댓값 : -1 , b 의 최솟값 : 2

따라서 $(-1) + 2 = 1$

22. $a > 1$ 일 때 $b = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$, $c = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right)$ 이라 한다. a, b, c 의
대소 관계로 옳은 것은?

- ① $a > b > c$ ② $a > c > b$ ③ $b > c > a$
④ $b > a > c$ ⑤ $c > b > a$

해설

$$b - a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) - a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - a \right)$$

그런데, $a > 1$ 이므로 $\frac{1}{a} - a < 0 \quad \therefore b < a$

$$\text{또, } b = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \quad \left(\because a \neq \frac{1}{a} \right)$$

$$c - b = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right) - b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - b \right) < 0$$

$$\therefore c < b$$

$$\therefore a > b > c$$

23. 세 양수 a, b, c 가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

- I. $a + b + c \geq 3$
II. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$
III. $ab + bc + ca \geq 3$
IV. $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8$

- ① I, II ② I, III ③ III, IV
④ I, III, IV ⑤ I, II, III, IV

해설

$abc = 1$ 이므로
I. $a + b + c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$
II. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$
III. $ab + bc + ca \geq 3 \sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$
IV. $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$
 $= abc + (ab + bc + ca) + (a + b + c) + 1$
 $\geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$

24. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?

민주: 한결이가 빠졌어.
한결: 민주가 한 말은 거짓말이야.
은하: 민주가 빠졌어.
겨레: 나는 안 빠졌어.

- ① 겨레, 한결
- ② 겨레, 민주
- ③ 겨레, 은하
- ④ 민주, 한결
- ⑤ 민주, 은하

해설

- ㉠ 민주가 참 : 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
㉡ 한결이 참 : 겨레가 빠짐
㉢ 은하가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
㉤ 겨레가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
∴ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.

25. 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c 라 하고 $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ 라 할 때,

$(s - a)(s - b)(s - c) \leq kabc$ 를 만족시키는 상수 k 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{1}{4}$
- ③ $\frac{1}{7}$
- ④ $\frac{1}{8}$
- ⑤ $\frac{1}{12}$

해설

$$s - a = \frac{1}{2}(a + b + c) - a = \frac{1}{2}(-a + b + c) > 0$$

($\because a, b, c$ 는 삼각형의 세 변)

같은 방법으로 $s - b > 0, s - c > 0$

(산술평균) $\geq$ (기하평균)이므로

$$2\sqrt{(s - a)(s - b)} \leq (s - a) + (s - b) = c$$

(등호는 $a = b$ 일 때 성립)

$$2\sqrt{(s - b)(s - c)} \leq (s - b) + (s - c) = a$$

(등호는 $b = c$ 일 때 성립)

$$2\sqrt{(s - c)(s - a)} \leq (s - c) + (s - a) = b$$

(등호는 $c = a$ 일 때 성립)

$$\text{변변 곱하면 } 8(s - a)(s - b)(s - c) \leq abc$$

$$\therefore (s - a)(s - b)(s - c) \leq \frac{1}{8}abc$$

(등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

$$\therefore k = \frac{1}{8}$$

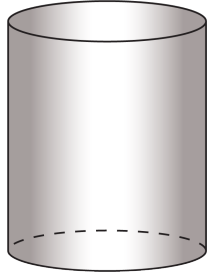
26. 양수 x, y, z 에 대하여 $x + 2y + 3z = 6$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z}$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}
 & 6 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \right) \\
 &= (x + 2y + 3z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \right) \\
 &= 3 + \left(\frac{2y}{x} + \frac{x}{2y} \right) + \left(\frac{3z}{2y} + \frac{2y}{3z} \right) + \left(\frac{x}{3z} + \frac{3z}{x} \right) \\
 &\geq 3 + 2 \sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{x}{2y}} + 2 \sqrt{\frac{3z}{2y} \cdot \frac{2y}{3z}} + 2 \sqrt{\frac{x}{3z} \cdot \frac{3z}{x}} \\
 &= 9 \text{ (단, 등호는 } x = 2y = 3z = 2 \text{ 일 때 성립)} \\
 &\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \text{ 의 최솟값은 } \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

27. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 1m^2 당 1만원이다. 보일러의 부피가 64m^3 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



- ① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
 ④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x , 높이를 y 라 하면,
 부피 V 는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 철판의 넓이를 S 라 하면
 $S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2\pi xy$
 $= 8x^2 + 2x \times \frac{64}{x^2} = 8x^2 + \frac{128}{x}$
 $= 8x^2 + \frac{64}{x} + \frac{64}{x} \geq 3 \sqrt[3]{8x^2 \times \frac{64}{x} \times \frac{64}{x}} = 96$
 단, 등호는 $8x^2 = \frac{64}{x}$ 일 때,
 곧 $x = 2$ 일 때 성립한다.
 따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

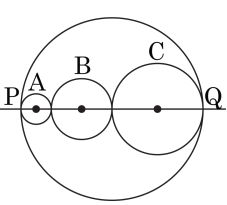
28. 자연수 p, q 가 두 부등식 $p(4x^2 + 9y^2 + 16z^2) \geq (2x + 3y + 4z)^2$ 와 $q\left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right) \geq (x + y + z)^2$ 을 만족할 때 pq 의 최솟값은?
(단, x, y, z 는 실수)

- ① 6
- ② 9
- ③ 12
- ④ 15
- ⑤ 18

해설

x, y, z 는 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
(i) $(1^2 + 1^2 + 1^2)(2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2\}$
 $\geq (2x + 3y + 4z)^2$
 $3(4x^2 + 9y^2 + 16z^2) \geq (2x + 3y + 4z)^2$
(단, 등호는 $2x = 3y = 4z$ 일 때 성립)
따라서 $p(4x^2 + 9y^2 + 16z^2) \geq (2x + 3y + 4z)^2$ 이 성립하려면
 $p \geq 3$
(ii) $\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\}$
 $\left\{x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2\right\} \geq (x + y + z)^2$
 $6\left(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}\right) \geq (x + y + z)^2$
(단, 등호는 $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 일 때 성립)
따라서 $q(x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3}) \geq (x + y + z)^2$ 이 성립하려면 $q \geq 6$
(i), (ii)에서 pq 의 최솟값은 18이다.

29. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



- ① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$
 ④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z 라 하면
 구의 겹넓이는
 $S_1 = 4\pi x^2, S_2 = 4\pi y^2, S_3 = 4\pi z^2$
 $4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$
 $(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$
 $10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$
 $4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$
 PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$ 이므로 $8\sqrt{35}$