1. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x+y| = |x-y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y| = |x-y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2 = (x-y)^2$ $\leftrightarrow$ $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$ $\leftrightarrow$ $xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

2. 다음 중 명제의 대우가 참인 것은?

① x 가 유리수이면 x^2 은 유리수이다.

② 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다.

③ $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다.

④ 닮음인 두 삼각형은 합동이다.

⑤ x 또는 y 가 무리수이면 $x + y$ 가 무리수이다.

해설

명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

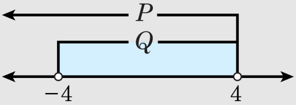
3. $x < 4$는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ____조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4,\ q\ :\ -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

4. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

> • $|a| = |b|$ 는 $a = b$ 이기 위한 (가) 조건이다.
> • 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요 ② 필요, 충분

③ 충분, 충분 ④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a| = |b| \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad\times\quad} \\ \xleftarrow{\quad\circ\quad} \end{array} \quad a = b \;\therefore$ 필요

$\{x \mid x$는 3의 배수$\} \supset \{x \mid x$는 6의 배수$\} \;\therefore$ 필요

5. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $1 < x \leq 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가) 조건이다.
- $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요 ② 필요, 충분

③ 충분, 충분 ④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$P = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$,

$Q = \{x \mid x > -2\}$ 라고 하면

$P \subset Q$, $\therefore$ 충분조건

$R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\}$,

$S = \left\{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\right\} = \{2\}$ 라고 하면

$R = S$, $\therefore$ 필요충분조건

6. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

7. 실수 x, y, z 에 대하여 조건 '$x^2+y^2+z^2=0$' 의 부정과 서로 같은 것은?

① $x=y=z=0$

② $x=0$ 또는 $y=0$ 또는 $z=0$

③ $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이고 $z \neq 0$

④ $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 또는 $z \neq 0$

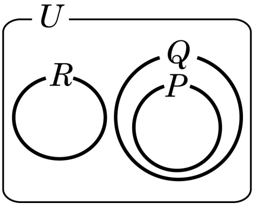
⑤ $x \neq 0$ 이고 $y=0$ 이고 $z=0$

해설

$x^2+y^2+z^2=0$ 의 부정은 $x^2+y^2+z^2 \neq 0$ 이다.

$\therefore$ $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 또는 $z \neq 0$

8. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, 이들 사이의 포함 관계는 다음 그림과 같다. 다음 명제 중 거짓인 것은?



① $r \to \sim q$　② $r \to \sim p$　③ $p \to \sim r$
④ $\sim q \to \sim p$　⑤ $p \to \sim q$

해설

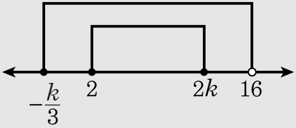
명제의 참, 거짓은 각각의 조건을 만족하는 집합의 포함 관계로 판별할 수 있다.

① $R \subset Q^c$ 이므로 $r \to \sim q$ 는 참이다.
② $R \subset P^c$ 이므로 $r \to \sim p$ 는 참이다.
③ $P \subset R^c$ 이므로 $p \to \sim r$ 는 참이다.
④ $Q^c \subset P^c$ 이므로 $\sim q \to \sim p$ 는 참이다.
⑤ $P \not\subset Q^c$ 이므로 $p \to \sim q$ 는 거짓이다.

9. 두 조건 $p : 2 \le x \le 2k$, $q : -\frac{k}{3} \le x < 16$ 에 대하여 'p이면 q 이다.'가 참이 되도록 하는 정수 k 의 개수는? (단, $k \ge 1$)

① 7 개 ② 8 개 ③ 12 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설



$-\frac{k}{3} \le 2 \quad \rightarrow \quad k \ge -6,\ 2k < 16 \quad \rightarrow \quad k < 8,\ 1 \le k < 8$이므로

정수 k의 개수는 7개

10. p : $|x-1| \le h$, q : $|x+2| \le 7$ 에 대하여 'p 이면 q 이다' 가 참이 되도록 하는 h 의 최댓값은? (단, $h \ge 0$)

① 4 ② 5 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
$|x-1| \le h$ 에서 $-h \le x-1 \le h$ 이므로
$-h+1 \le x \le h+1$
또 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면
$|x+2| \le 7$ 에서 $-7 \le x+2 \le 7$ 이므로
$-9 \le x \le 5$
$P \subset Q$ 이어야 하므로
$-h+1 \ge -9$ 에서
$h \le 10$
$h+1 \le 5$ 에서 $h \le 4$
따라서 $0 \le h \le 4$ 이므로 h 의 최댓값은 4

11. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$

$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$

$(P \cap U) \cap Q = P$

$P \cap Q = P$

$P \subset Q$

$\therefore \; p \Rightarrow q$

따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

12. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 s이기 위한 필요조건이다.

13. 세 수 2^{60}, 3^{40}, 5^{30}의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $5^{30} < 3^{40} < 2^{60}$

② $3^{40} < 2^{60} < 5^{30}$

③ $3 < 5^{30} < 2^{60}$

④ $2^{60} < 5^{30} < 3^{40}$

⑤ $2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

해설

$$\frac{2^{60}}{3^{40}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{20} = \left(\frac{8}{9}\right)^{20} < 1 \text{ 따라서 } 2^{60} < 3^{40}$$

$$\frac{3^{40}}{5^{30}} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^{10} = \left(\frac{81}{125}\right)^{10} < 1 \text{ 따라서 } 3^{40} < 5^{30}$$

$$\therefore 2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$$

14. 임의의 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2+4xy+4y^2+10x+ay+b>0$이 항상 성립할 조건을 구하면?

① $a>20,\quad b>25$

② $a>=20,\quad b>25$

③ $a>20,\quad b=25$

④ $a=20,\quad b>25$

⑤ $a=20,\quad b<25$

해설

$x^2+2(2y+5)x+4y^2+ay+b>0$

$\dfrac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$

$(20-a)y+25-b<0$

이것이 임의의 실수 y에 대하여 항상 성립할 조건은

$20-a=0,\ 25-b<0$

$\therefore\ a=20,\ b>25$

15. 부등식 $x^2+(a+1)x+(a+1)\geq 0$이 절대부등식이 되기 위한 정수 a의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$D=(a+1)^2-4(a+1)\leq 0$이어야 하므로

$a^2+2a+1-4a-4$

$=a^2-2a-3=(a-3)(a+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 3$

따라서 정수 a의 개수는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$으로 5개

16. 두 조건 p, q가 $p\ :|x|<a$, $q\ :|x-1|\geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0<a\leq 4$ ② $a>4$ ③ $a\geq 4$

④ $a>2$ ⑤ $2\leq a\leq 4$

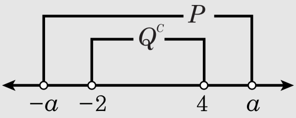
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow Q^c \subset P$

$P=\{x|-a<x<a\}$

$Q=\{x|x\leq -2$ 또는 $x\geq 4\}$

$Q^c=\{x|-2<x<4\}$



$-a\leq -2 \rightarrow a\geq 2$, $a\geq 4$

$\therefore a\geq 4$

17. 명제 '$|x-1|<1$ 이면 $|x-1| \le 2$ 이다.' 의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 고른 것은?

① 대우　② 역, 이　③ 이, 대우

④ 역, 대우　⑤ 역, 이, 대우

해설

$\{x \mid |x-1|<1\} = \{x \mid 0<x<2\}$

$\{x \mid |x-1| \le 2\} = \{x \mid -1 \le x \le 3\}$

역 : $|x-1| \le 2$ 이면 $|x-1|<1$ 이다.

$\{x \mid -1 \le x \le 3\} \not\subset \{x \mid 0<x<2\}$ 이므로 거짓이다.

이 : $|x-1| \ge 1$ 이면 $|x-1|>2$ 이다.

$\{x \mid x \le 0$ 또는 $x \ge 2\} \not\subset \{x \mid x<-1$ 또는 $x>3\}$ 이므로 거짓이다.

대우 : $|x-1|>2$ 이면 $|x-1| \ge 1$ 이다.

$\{x \mid x<-1$ 또는 $x>3\} \subset \{x \mid x \le 0$ 또는 $x \ge 2\}$ 이므로 참이다.

18. 두 명제「겨울이 오면 춥다.」, 「추우면 눈이 온다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은?

① 눈이 오지 않으면 춥지 않다.

② 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

③ 겨울이 오면 눈이 온다.

④ 눈이 오면 겨울이 온다.

⑤ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다.

라 하면 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이다.

① $q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim q$ (대우 명제)

② $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (대우 명제)

③ $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로

$p \Rightarrow r$ (삼단논법)

④ $p \Rightarrow r$ 이라 해서 반드시 $r \Rightarrow p$ 인 것은 아니다.

⑤ $p \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$ (대우명제)

19. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가) 이면 $x^2+y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다.
> (가) 에서 $x^2+y^2 >$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \ne 1$ 가 성립한다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① $x>1$ 이고 $y>1$, 1 , 참

② $x>1$ 이고 $y>1$, 2 , 참

③ $x>1$ 또는 $y>1$, 2 , 참

④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓

⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 의 부정은 $x>1$ 이고 $y>1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

20. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)^c = B-A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $A \cap B = \varnothing$　　② $A \cup B = U$　　③ $A \subset B^c$

④ $A^c \cup B = U$　　⑤ $A = B^c$

해설

$(A-B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$, $B - A = A^c \cap B$ $A^c \cup B = A^c \cap B$

에서 $A^c = B$

즉, $A = B^c$

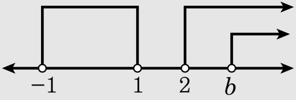
21. $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 $x > a$은 필요조건이고 $x > b$는 충분조건일 때 a 의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

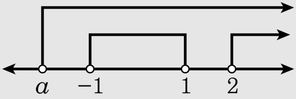
해설

$x > b$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 충분조건에서



$\therefore b \geq 2$

$x > a$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 필요조건에서



$\therefore a \leq -1$

$\therefore a$ 의 최댓값 : -1, b 의 최솟값 : 2

따라서 $(-1) + 2 = 1$

22. $a > 1$일 때 $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a > b > c$　　② $a > c > b$　　③ $b > c > a$

④ $b > a > c$　　⑤ $c > b > a$

해설

$$b - a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)$$

그런데, $a > 1$이므로 $\frac{1}{a} - a < 0$ $\quad\therefore\ b < a$

또, $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \ \left(\because\ a \neq \frac{1}{a}\right)$

$$c - b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$$

$\therefore\ c < b$

$\therefore\ a > b > c$

23. 세 양수 a, b, c가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a+b+c \geq 3$ Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3$ Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3$ Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ　　② Ⅰ, Ⅲ　　③ Ⅲ, Ⅳ

④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc = 1$이므로

Ⅰ. $a+b+c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$

Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$

Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$

Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$

$= abc + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1$

$\geq 1+3+3+1 = 8$

24. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?

> 민주 : 한결이가 빠졌어.
> 한결 : 민주가 한 말은 거짓말이야.
> 은하 : 민주가 빠졌어.
> 겨레 : 나는 안 빠졌어.

① 겨레, 한결　　② 겨레, 민주　　③ 겨레, 은하
④ 민주, 한결　　⑤ 민주, 은하

해설

㉠ 민주가 참 : 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
㉡ 한결이 참 : 겨레가 빠짐
㉢ 은하가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
㉣ 겨레가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
∴ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.

25. 삼각형의 세 변의 길이를 $a,\ b,\ c$라 하고 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$라 할 때, $(s-a)(s-b)(s-c) \le kabc$를 만족시키는 상수 k의 값을 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

해설

$s-a=\frac{1}{2}(a+b+c)-a=\frac{1}{2}(-a+b+c)>0$

($\because$ $a,\ b,\ c$는 삼각형의 세 변)

같은 방법으로 $s-b>0,\ s-c>0$

(산술평균)≥(기하평균)이므로

$2\sqrt{(s-a)(s-b)} \le (s-a)+(s-b)=c$

(등호는 $a=b$일 때 성립)

$2\sqrt{(s-b)(s-c)} \le (s-b)+(s-c)=a$

(등호는 $b=c$일 때 성립)

$2\sqrt{(s-c)(s-a)} \le (s-c)+(s-a)=b$

(등호는 $c=a$일 때 성립)

변변 곱하면 $8(s-a)(s-b)(s-c) \le abc$

$\therefore (s-a)(s-b)(s-c) \le \frac{1}{8}abc$

(등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$\therefore k=\frac{1}{8}$

26. 양수 x, y, z에 대하여 $x+2y+3z=6$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}$의 최솟값은?

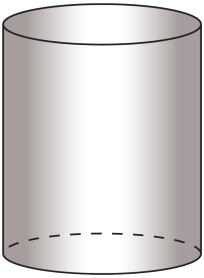
① $\frac{2}{3}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ 3

해설

$$6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)$$
$$=(x+2y+3z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)$$
$$=3+\left(\frac{2y}{x}+\frac{x}{2y}\right)+\left(\frac{3z}{2y}+\frac{2y}{3z}\right)+\left(\frac{x}{3z}+\frac{3z}{x}\right)$$
$$\geq 3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{2y}}+2\sqrt{\frac{3z}{2y}\cdot\frac{2y}{3z}}+2\sqrt{\frac{x}{3z}\cdot\frac{3z}{x}}$$
$=9$ (단, 등호는 $x=2y=3z=2$ 일 때 성립)

$\therefore$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}$ 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$

27. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\text{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\text{m}^3$ 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원　② 104만원　③ 100만원
④ 96만원　⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x, 높이를 y라 하면,
부피 V는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots\cdots$ ㉠
철판의 넓이를 S 라 하면
$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$

$$= 8x^2 + 2x \times \frac{64}{x^2} = 8x^2 + \frac{128}{x}$$

$$= 8x^2 + \frac{64}{x} + \frac{64}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{64}{x} \times \frac{64}{x}} = 96$$

단, 등호는 $8x^2 = \frac{64}{x}$ 일 때,
곧 $x = 2$일 때 성립한다.
따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

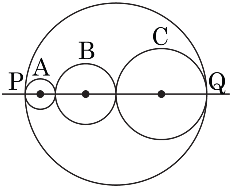
28. 자연수 p, q가 두 부등식 $p(4x^2+9y^2+16z^2) \ge (2x+3y+4z)^2$와 $q\left(x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}\right) \ge (x+y+z)^2$을 만족할 때 pq의 최솟값은? (단, x, y, z는 실수)

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

해설

x, y, z는 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
(i) $(1^2+1^2+1^2)\left\{(2x)^2+(3y)^2+(4z)^2\right\}$
$\ge (2x+3y+4z)^2$
$3(4x^2+9y^2+16z^2) \ge (2x+3y+4z)^2$
(단, 등호는 $2x=3y=4z$ 일 때 성립)
따라서 $p(4x^2+9y^2+16z^2) \ge (2x+3y+4z)^2$이 성립하려면
$p \ge 3$
(ii) $\left\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}$
$\left\{x^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{z}{\sqrt{3}}\right)^2\right\} \ge (x+y+z)^2$
$6\left(x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}\right) \ge (x+y+z)^2$
(단, 등호는 $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 일 때 성립)
따라서 $q(x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}) \ge (x+y+z)^2$이 성립하려면 $q \ge 6$
(i), (ii)에서 pq의 최솟값은 18이다.

29. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$　② $6\sqrt{35}$　③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$　⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면

구의 겉넓이는

$S_1 = 4\pi x^2$, $S_2 = 4\pi y^2$, $S_3 = 4\pi z^2$

$4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$

$(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$

$10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$

$4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$

PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$이므로 $8\sqrt{35}$