1. 다음 중 유한집합이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $\{\varnothing\}$

② $\{x \mid x$는 두 자리의 자연수$\}$

③ $\{x \mid x$는 분자가 1인 분수$\}$

④ $\{x \mid x$는 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 자연수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 100보다 크고 101보다 작은 자연수$\}$

해설

③ $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots\right\}$: 무한집합

④ $\{2,\ 5,\ 8 \cdots\}$: 무한집합

2. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소는 포함하지 않는 부분집합을 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $\{0\}$

▷ 정답: $\{0,\ 1\}$

해설

집합 A 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소 2를 포함하지 않는 부분집합을 원소의 개수별로 차례대로 구하면 $\{0\}$, $\{0, 1\}$ 이다

3. 집합 $A = \{x | 1 \le x \le 10,\ x$는 자연수$\}$의 부분집합 중에서 홀수는 반드시 포함하고, 4의 배수는 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 4개 ② 8개 ③ 16개 ④ 32개 ⑤ 64개

해설

$2^{10-5-2} = 2^3 = 8$(개)

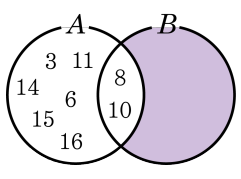
4. 집합 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$의 부분집합 중에서 $\{a, c, f\}$와 서로소인 집합의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$2^{6-3} = 2^3 = 8$(개)

5. 다음 벤 다이어그램에서 $A = \{3, 6, 8, 10, 11, 14, 15, 16\}$, $A \cup B = \{2, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19\}$ 일 때 색칠된 부분의 원소의 합을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 61

해설

색칠한 부분의 원소는 집합 $A \cup B$에서 A 의 원소를 뺀 것이다.
$A \cup B = \{2, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19\}$ 이므로 벤 다이어그램에 표시되어 있지 않은 원소를 말한다.
그러므로 색칠한 부분의 원소는 $2, 9, 13, 18, 19$ 이다.
원소의 합은 $2 + 9 + 13 + 18 + 19 = 61$ 이다.

6. 다음에서 집합인 것은 모두 몇 개인가?

㉠ 귀여운 새들의 모임
㉡ 우리나라 중학생의 모임
㉢ 작은 수의 모임
㉣ 삼각형의 모임
㉤ 우리 반에서 수학을 잘 하는 학생의 모임

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

집합이란 특정한 조건에 맞는 원소들의 모임이다. 따라서 집합인 것은 우리나라 중학생의 모임과 삼각형의 모임이다. 따라서 2 개이다.

7. n 이 자연수이고 집합 A, B 가 $A = \{x \mid x = 2\times n\}$, $B = \{x \mid x = 2\times n+1\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $1 \notin B$ ② $4 \in A$ ③ $7 \notin A$ ④ $8 \notin A$ ⑤ $7 \in B$

해설

집합 A 의 원소는 2, 4, 6, $\cdots$ 이고 집합 B 의 원소는 3, 5, 7, $\cdots$ 이므로 $8 \in A$ 이다.

8. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\varnothing) = n(\{0\})$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 2$

③ $n(\{4\}) = 4$

④ $n(\{x|x\text{는 }40\text{ 이하의 짝수}\}) = 40$

⑤ $n(\{x|x\text{는 }2 < x < 4\text{인 홀수}\}) = 1$

해설

① $n(\varnothing) = 0,\ n(\{0\}) = 1$

② $n(\{1,\ 2,\ 4\}) - n(\{1,\ 4\}) = 3 - 2 = 1$

③ $n(\{4\}) = 1$

④ $n(\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 40\}) = 20$

⑤ $n(\{3\}) = 1$

9. 다음 집합의 관한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① $A = \{\varnothing\}$ 일 때, $n(A) = 1$

② $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 0$

③ $C = \{x \mid x\text{는 } 12\text{의 약수}\}$ 일 때, $n(C) = 6$

④ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = c$

⑤ $n(\{0, 1, 2\}) = 3$

해설

② $B = \{0\}$ 일 때, $n(B) = 1$
④ $n(\{a, b, c\}) - n(\{a, b\}) = 1$

10. 두 집합 $A = \{1,\ 5,\ 8,\ a\}$, B 에 대하여 $A = B$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a = b,\ a - b = 0$

11. 다음 중 옳은 것을 모두 골라라. (정답 2개)

① $A = \{\varnothing\}$ 이면 $n(A) = 0$

② $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $n(A) = n(B)$

③ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$

④ $n(A) = 0$ 이면 $A = \varnothing$

⑤ $n(A) = 0$, $n(B) \neq 0$ 이면 $B \subset A$ 이다.

해설

① $A = \{\varnothing\}$ 이면 집합 A 의 원소가 $\varnothing$ 이므로, $n(A) = 1$ 이다.
③ 예를 들어 $A = \{2, 3, 5\}$ 이고, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이지만, $A \not\subset B$ 이다.
⑤ $A = \varnothing$ 이므로, 집합 A 의 부분집합은 $\varnothing$ 하나 밖에 없다.

12. 집합 $A=\{2,3,a+2\}, B=\{3,5,a\}$ 에 대하여,
$A\cup B=\{2,3,4,5\}$ 일 때, 집합 $A\cap B$ 는?

① $\{2\}$ ② $\{3\}$ ③ $\{2,3\}$

④ $\{2,4\}$ ⑤ $\{2,3,5\}$

해설

$a+2>a$ 이므로 $a+2=4$, $a=2$
$A=\{2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$
$\therefore A\cap B=\{2,\ 3\}$

13. 두 집합

$A = \{x \mid x$는 8 의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 10 이하의 짝수$\}$에 대하여

$n(A \cap B) = \square$, $n(A \cup B) = \square$이다.

$\square$ 안에 들어갈 수를 차례대로 쓴 것은?

① 2, 4 ② 3, 9 ③ 3, 6 ④ 4, 6 ⑤ 4, 9

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로

$A \cap B = \{2, 4, 8\}, A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ 이다.

따라서 $n(A \cap B) = 3, n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 4 + 5 - 3 = 6$ 이다.

14. 60 명의 학생 중 등산을 좋아하는 학생이 28 명, 영화 감상을 좋아하는 학생이 37 명, 등산과 영화 감상을 모두 좋아하는 학생이 12 명일 때, 등산과 영화 감상을 모두 싫어하는 학생수를 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 7 명

해설

등산을 좋아하는 학생을 집합 A 라 하고, 영화 감상을 좋아하는 학생을 집합 B 라고 하자.
등산과 영화 감상을 좋아하는 학생, 즉 $n(A \cap B) = 12$ 이다.
등산과 영화 감상을 모두 싫어하는 학생은 합집합을 제외한 나머지 인원이다.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$x = 28 + 37 - 12$
$x = 53$
$n(A \cup B) = 53$ 이므로 수학과 영어을 모두 싫어하는 학생은 $60 - 53 = 7$(명) 이다.

15. 자연수 N의 배수의 집합을 A_N이라 할 때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_a$을 만족하는 a의 최솟값을 m , $(A_4 \cup A_6) \subset A_b$을 만족하는 b의 최댓값을 M이라 할 때, $M-m$의 값은?

① -10 ② 28 ③ 14 ④ 10 ⑤ -14

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_a \rightarrow m = 12 (\because\ 4, 6$의 $L.C.M)$
$(A_4 \cup A_6) \subset A_b \rightarrow M = 2 (\because\ 4, 6$의 $G.C.D)$
$\therefore\ M-m=-10$

16. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 15 이하의 소수$\}$, $B = \{x \mid x$는 5 미만의 소수$\}$ 에 대하여 $B \subset X \subset A$ 를 만족하는 X 의 개수를 모두 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$, $B = \{2,\ 3\}$
집합 X 는 원소 2 와 3 을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로
부분집합의 개수는
$2^{6-2} = 2^4 = 16$ (개)

17. 집합 $A = \{x \mid x$는 15 이하의 3의 배수$\}$ 일 때, 적어도 하나의 원소가 짝수인 집합 A 의 부분집합의 개수는?

① 6 개 ② 12 개 ③ 18 개 ④ 24 개 ⑤ 30 개

해설

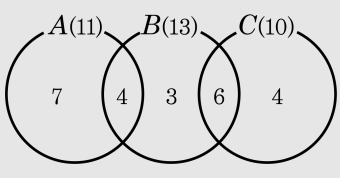
$A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$ 적어도 하나는 짝수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 홀수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면되므로 $2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$ (개) 이다.

18. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 11$, $n(B) = 13$, $n(C) = 10$, $n(A \cap B) = 4$, $n(B \cup C) = 17$, $A \cap C = \varnothing$ 일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수는?

① 12 ② 17 ③ 24 ④ 30 ⑤ 34

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ n(A \cup B \cup C) = 24$

19. 두 집합 A, B에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B \neq B \cap A$　　② $A \subset B$이면 $A \cup B = A$

③ $A \subset B$이면 $A \cap B = B$　　④ $n(A \cap B \cap \varnothing) = 0$

⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \cap B = B \cap A$

② $A \subset B$이면 $A \cup B = B$

③ $A \subset B$이면 $A \cap B = A$

⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

20. 두 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,3\}$ 에 대하여 $A\cap X=X$, $(A\cap B)\cup X=X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

집합 X 는 원소 $2,3$ 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
$\therefore\ n(X)=2^{5-2}=2^3=8$ (개)

21. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \varnothing$ 일 때, $A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이라면 집합 B 로 알맞지 <u>않은</u> 것은?

① $B = \{1, 2, 3, 6, 8\}$ ② $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$

③ $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ ④ $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$

⑤ $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$A - B = \varnothing$ 이면 집합 A 의 모든 원소는 집합 B에 속한다.

22. 두 자리 자연수 중 k의 배수인 것 전체의 집합을 $A_k(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$라 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 의 원소의 개수는?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$A_2 \cap (A_3 \cup A_4) = (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4) = A_6 \cup A_4$
$10 \le 6n < 100$ 에서 $2 \le n \le 16$ $\therefore\ n(A_6) = 15$
$10 \le 4n < 100$ 에서 $3 \le n < 25$ $\therefore\ n(A_4) = 22$
$10 \le 12n < 100$ 에서 $1 \le n \le 8$ $\therefore\ n(A_{12}) = 8$
그러므로 $n(A_6 \cup A_4) = 15 + 22 - 8 = 29$

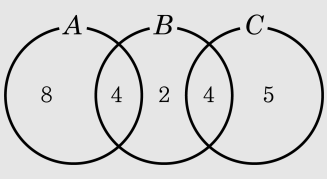
23. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 12$, $n(B) = 10$, $n(C) = 9$, $n(A \cap B) = 4$, $n(B \cup C) = 15$, $A \cap C = \varnothing$ 일 때, $n(A \cup B \cup C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$n(B) = 10$, $n(C) = 9$, $n(B \cup C) = 15$ 이므로
$n(B \cap C) = 10 + 9 - 15 = 4$
$A \cap C = \varnothing$ 이므로 벤 다이어그램을 그려보면 $\therefore n(A \cup B \cup C) = 8 + 4 + 2 + 4 + 5 = 23$



24. 3 개의 양수를 원소로 갖는 집합 $A = \{a, b, c\}$ 에 대하여 $B = \{\alpha+\beta \mid \alpha \in A, \beta \in A\}$, $C = \{\alpha\beta \mid \alpha \in A, \beta \in A\}$ 를 만들었더니 $B = \{5, 7, 8\}$, $C = \{6, 10, 15\}$ 가 되었다. 이 때 집합 A 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

> ㉠ 집합 A 는 소수로만 이루어진 집합이다.
>
> ㉡ 집합 A 의 원소 중 최소인 수는 3 이다.
>
> ㉢ 집합 A 의 원소 중 최대인 수는 11 이다.
>
> ㉣ 집합 A 의 원소들의 합은 19 이다.
>
> ㉤ 집합 A 의 원소 중에는 짝수도 있다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢, ㉣ ③ ㉠, ㉤
④ ㉡, ㉢, ㉤ ⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

A 는 3 개의 양수를 원소로 갖는 집합이므로 일반성을 잃지 않고 세 수를 $0 < a < b < c$ 라 하자. 이 때, B 의 최소인 수는 $a + b$, 최대인 수는 $b + c$.
C 의 최소인 수는 ab, 최대인 수는 bc

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases} \quad \cdots ①$$

$$\begin{cases} b + c = 8 \\ bc = 15 \end{cases} \quad \cdots ②$$

①에서 a, b 는 임의의 실수 t 에 대하여 $t^2 - 5t + 6 = 0$ 의 두 근이므로 $a = 2$, $b = 3$ ($\because$ $a < b$)
②에서 b, c 는 임의의 실수 t 에 대하여 $t^2 - 8t + 15 = 0$ 의 두 근이므로 $b = 3$, $c = 5$ ($\because$ $b < c$) $\therefore$ $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$
$\therefore$ $A = \{2, 3, 5\}$ 따라서 옳은 것은 ㉠, ㉤

25. 집합 $A = \{1,\ 2,\ \varnothing,\ \{1,\ 2\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\{1,\ 2\} \notin A$　② $\varnothing \subset A$　③ $\varnothing \in A$

④ $A \subset A$　⑤ $1 \in A$

해설

① $\{1,\ 2\} \in A$

26. 두 집합 $A = \{3, a+3, 2a+3\}$, $B = \{5, a+4, 4a+3\}$ 에 대하여 $A - B = \{3, 7\}$ 일 때, a 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$A = \{3, a+3, 2a+3\}$, $B = \{5, a+4, 4a+3\}$ 이고,
$A - B = \{3, 7\}$ 이므로 집합 A 는 반드시 원소 7 을 가진다.
(1) $a + 3 = 7$ 일 때, $a = 4$ 이고, $A = \{3, 7, 11\}$, $B = \{5, 8, 19\}$ 이다.
이때 $A - B \neq \{3,\ 7\}$ 이므로 성립할 수 없다.
(2) $2a + 3 = 7$ 일 때, $a = 2$ 이고, $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{5, 6, 11\}$ 이다.
이때 $A - B = \{3, 7\}$ 이므로 성립된다.
$\therefore a = 2$

27. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 A, B 가 각각

$A = \left\{x | x = 3p + \frac{1}{2}q, p \in N, q \in N\right\}$, $B = \{x | x$는 10보다 작은 소수$\}$

일 때, $n(A^c \cup B)^c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$A = \left\{x | x = 3p + \frac{1}{2}q, p \in N, q \in N\right\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, \cdots\}$

$B = \{x | x$는 10보다 작은 소수$\} = \{2, 3, 5, 7\}$

$n(A^c \cup B)^c = A^c \cap B = B - A = \{2, 3\}$ 이므로

$n(A^c \cup B)^c = 2$

28. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c \cap X^c = \{8\}$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 이고,
$A^c \cap B^c \cap X^c = (A \cup B)^c - X$
$(A \cup B)^c = \{7, 8\}$ 이므로 X 는 반드시 7 을 원소로 가져야 한다.
또, $A - B = \{1, 2, 3\}$ 이고, $(A - B) \cup X = X \Rightarrow A - B \subset X$ 이므로 X 는 반드시 1, 2, 3 을 원소로 가져야 한다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^{8-3-1} = 16$ (개)

29. 전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A \cup B = U$, $A \cap B = \phi$ 이고, 집합 A, B의 원소의 총합을 각각 $f(A), f(B)$라 할 때, $f(A) \cdot f(B)$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 110

해설

$f(A) + f(B) = f(U) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

$f(A) \cdot f(B) = f(A)\{21 - f(A)\} = -\{f(A)\}^2 + 21f(A) = -\left\{f(A) - \frac{21}{2}\right\}^2 + \frac{441}{4}$ 그런데 $f(A)$ 는 자연수이므로 $\frac{21}{2}$ 에 가까운 정수에서 최댓값을 가진다.

따라서, $f(A) = 10$ 또는 11 일 때 최댓값은 $-10^2 + 21 \times 10 = 110$