1. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_5의 값은?

① 4　② 8　③ 16　④ 32　⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

2. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, $a_3 + a_4$의 값은?

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} (n = 1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{7}{16}$ ④ $\frac{5}{24}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\frac{1}{a_1} = 3,\ \frac{1}{a_2} = 6$이므로

$\frac{1}{a_n} = 3 + (n-1) \cdot 3 = 3n,\ a_n = \frac{1}{3n}$

$a_3 = \frac{1}{9},\ a_4 = \frac{1}{12}$ $\therefore\ a_3 + a_4 = \frac{7}{36}$

3. $a_1=4,\ a_{n+1}=a_n+3(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

해설

$a_1=4,\ a_{n+1}=a_n+3$ 이므로
a_n 은 초항이 4, 공차가 3인 등차수열
$\therefore a_n=4+(n-1)\cdot 3$
$=4+3n-3$
$=3n+1$
$\therefore a_{10}=31$

4. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로
$a_n = 2 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 5$
$\therefore\ a_{10} = -3\cdot 10 + 5 = -25$

5. $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{20} = \dfrac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$

6. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-2}\end{aligned}$$

7. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26　② 31　③ 36　④ 46　⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$ 이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$
$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$
$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

8. $a_{n+1} - a_n = 2(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\dfrac{2^{a_2} + 2^{a_4}}{2^{a_1} + 2^{a_3}}$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$

즉, $a_2 = a_1 + 2,\ a_3 = a_1 + 4,\ a_4 = a_1 + 6$

$$\therefore \frac{2^{a_2} + 2^{a_4}}{2^{a_1} + 2^{a_3}} = \frac{2^{a_1+2} + 2^{a_1+6}}{2^{a_1} + 2^{a_1+4}}$$

$$= \frac{2^{a_1+2}(1+2^4)}{2^{a_1}(1+2^4)} = \frac{2^2 \cdot 2^{a_1}(1+2^4)}{2^{a_1}(1+2^4)} = 2^2 = 4$$

9. $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1,\ a_{n+9}-a_{n+2}=35$가 성립할 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 496

해설

$2a_{n+2}=a_n+a_{n+2}$를 만족하는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_{n+9}=a_{n+2}+7d$에서 $7d=35$

$\therefore\ d=5$

$\therefore\ a_{100}=1+99\cdot 5=496$

10. $a_1 = 20,\ a_{n+1} = a_n - 3\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_k = -22$ 를 만족시키는 자연수 k 의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 20, 공차가 -3 인 등차수열이므로
$a_n = 20 + (n-1) \times (-3) = -3n + 23$
즉, $a_k = -3k + 23 = -22$ 에서 $-3k = -45$
$\therefore k = 15$

11. 수열 $\{a_n\}$이 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$를 만족시킨다. $a_1 = 3,\ a_5 = 25$일 때, a_{33}의 값은?

① 175　② 176　③ 177　④ 178　⑤ 179

해설

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1 = 3$이므로 $a_5 = 3 + 4d = 25$ $\quad \therefore d = \dfrac{11}{2}$

$\therefore a_{33} = 3 + 32 \times \dfrac{11}{2} = 3 + 176 = 179$

12. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족할 때, $S_5 = a_1 + a_2 + \cdots + a_5$의 값은?

① 31 ② 63 ③ 127 ④ 255 ⑤ 511

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$ 이므로 1이고, 공비는 2이다.

$\therefore\ S_5 = \frac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$

13. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n = \frac{1}{a_n}$이라 할 때, $a_{15}b_{20}$의 값은?

① 3　② 9　③ 27　④ 81　⑤ 243

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}$　$\therefore b_n = 3^{n-1}$

$\therefore a_{15}b_{20} = \frac{1}{3^{14}} \cdot 3^{19} = 3^5 = 243$

14. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의될 때, a_{10}의 값은?

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

① $2 \cdot 3^8$　　② $2 \cdot 3^9$　　③ $2 \cdot 3^{10}$

④ $2 \cdot 3^{11}$　　⑤ $2 \cdot 3^{12}$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$이므로 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots, 9$를 대입하여 곱하면

$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \frac{a_5}{a_4} \times \frac{a_6}{a_5} \times \frac{a_7}{a_6} \times \frac{a_8}{a_7} \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9} = 3^9$

$\frac{a_{10}}{a_1} = 3^9$

$\therefore\ a_{10} = a_1 \cdot 3^9 = 2 \cdot 3^9$

15. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$ 를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_1 = a_1 + 1^2 \\ & a_3 = a_2 + 2^2 \\ & a_4 = a_3 + 3^2 \\ & \quad\vdots \\ +) & a_{10} = a_9 + 9^2 \\ \hline \end{array}$$

$a_{10} = a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2)$

$= 5 + \dfrac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6}$

$= 290$

16. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$$\begin{array}{rl} & \vdots \\ + & \underline{a_n = a_{n-1} + (n-1)} \\ & a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1) \\ & \quad = -1 + \dfrac{(n-1) \cdot n}{2} \end{array}$$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2}$$
$$= -1 + 45 = 44$$

17. $a_1 = -10,\ a_{n+1} = a_n + n^2\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{11} 의 값은?

① 210　② 275　③ 310　④ 375　⑤ 425

해설

$a_{n+1} - a_n = f(n)$ 꼴이면 $f(n)$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열임을 이용한다.

$a_{n+1} = a_n + n^2,\ a_{n+1} - a_n = n^2$ 이므로

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면 $b_n = n^2$

$\therefore a_{11} = -10 + \sum_{k=1}^{10} k^2$

$= -10 + \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 375$

18. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은?

① 511 ② 512 ③ 513 ④ 1023 ⑤ 1025

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$a_{n+1} - a_n = 2^n$이므로 $b_n = 2^n$

따라서 $n \geq 2$일 때,

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1 \cdots\cdots ㉠$$

이때, $a_1 = 1$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 일반항은 $a_n = 2^n - 1$

$\therefore a_9 = 2^9 - 1 = 511$

19. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$일 때, a_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 727

해설

$a_{n+1} - a_n = b_n = 2n - 5$

$\therefore a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k - 5)$

$= 2 + 2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} - 5(n-1)$

$= n^2 - 6n + 7$

$\therefore a_{30} = 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727$

20. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 수열 $\{a_n\}$이 정의될 때, a_n을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$의 n에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$

$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$

21. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32　② 64　③ 128　④ 256　⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$에서 n대신에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입하면

$a_2 = 2^1 a_1$

$a_3 = 2^2 a_2$

$a_4 = 2^3 a_3$

$\vdots$

$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$

$\therefore\ a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$

$a_{10} = 2^{50}$이므로 $2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$

$a_1 = 2^5 = 32$

22. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$$\boxed{a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)}$$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$

$\therefore a_n = a_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1}$ $\therefore\ a_{10} = 110 \times$

$= 110 \times \frac{2}{n(n+1)}$

$\frac{2}{110} = 2$

23. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} = 2a_n + 2$일 때, a_{10}의 값은?

① 1022　② 1024　③ 2021　④ 2046　⑤ 2082

해설

$a_{n+1} = 2a_n + 2$에서 $a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$
이때, $a_n + 2 = b_n$이라 하면
$b_{n+1} = 2b_n,\ b_1 = a_1 + 2 = 4$
즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4이고, 공비가 2인 등비수열이므로
$b_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$
따라서 $a_n = b_n - 2 = 2^{n+1} - 2$이므로
$a_{10} = 2^{11} - 2 = 2048 - 2 = 2046$

24. 다음은 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

> $a_{n+1} - \boxed{(가)} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{(가)})$이므로
> $a_n = \boxed{(가)} + (a_1 - \boxed{(가)})(\boxed{(나)})^{n-1}$

① 1, $\frac{1}{2}$　② 1, 2　③ 2, $\frac{1}{2}$　④ 2, 2　⑤ 3, $\frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$에서

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore$ (가) $= 2$, (나) $= \frac{1}{2}$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$이 성립하고 $a_1 = 1$일 때, $a_{10} + 1$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$이므로 $\alpha = -1$

$\therefore\ a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

26. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = -a_n + 2$와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

① $1 + (-1)^n$　② $2 + (-1)^n$　③ $3 + (-1)^n$
④ $4 + (-1)^n$　⑤ $5 + (-1)^n$

해설

$a_{n+1} = -a_n + 2$에서
$a_{n+1} - 1 = -(a_n - 1)$
이때, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_1 - 1$, 공비가 -1인 등비수열이므로
$a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$
$\therefore\ a_n = 1 + (-1)^n$

27. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① $3 - 2^{12}$ ② $3 - 2^{11}$ ③ $3 - 2^{10}$
④ $3 - 2^{9}$ ⑤ $3 - 2^{8}$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$의 양변에 -3을 더하여 정리하면
$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$
즉, 수열 $\{a_n - 3\}$은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2인 등비수열이므로
$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$
$\therefore\ a_n = 3 - 2^{n-1}$
$\therefore\ a_{10} = 3 - 2^{9}$

28. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$일 때, 일반항 a_n은?

① $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　③ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \frac{1}{2}$

④ 2^{n-1}　⑤ $2^n - 1$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$을 $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면

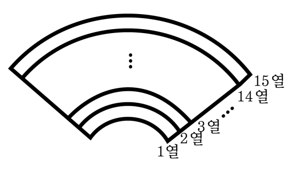
$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\alpha}{2}$에서 $\frac{\alpha}{2} = 1$ $\therefore \alpha = 2$

즉, $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

따라서 수열 $\{a_n - 2\}$는 첫째항이 $a_1 - 2 = -1$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

29. 다음 그림과 같이 관람석이 전체 15 열로 이루어진 극장이 있다. 제 n 열의 좌석 수를 a_n 이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+1} = a_n + 1$ 을 만족한다. 제 1 열의 좌석 수가 30 일 때, 이 극장의 총 좌석 수는?



① 1100 ② 555 ③ 430 ④ 330 ⑤ 290

해설

$a_{n+1} - a_n = 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 1 인 등차수열이다.
$\therefore\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot 1$
$= n + 29(\because\ a_1 = 30)$
따라서, 총 좌석 수는
$\sum_{k=1}^{15}(k+29) = \dfrac{15 \cdot 16}{2} + 29 \cdot 15 = 555$

30. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n$인 관계가 성립할 때, 이 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{2}(3^{10}-1)$ ② $3^{10}-1$ ③ $\frac{3}{2}(3^{10}-1)$
④ $2(3^{10}-1)$ ⑤ $\frac{5}{2}(3^{10}-1)$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$이므로 $r = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$S_{10} = \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1} = \dfrac{3(3^{10}-1)}{3-1}$

$= \dfrac{3}{2}(3^{10}-1)$

31. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 으로 정의 될 때, a_9의 값은?

① 2^{15}　② 2^{16}　③ $3 \cdot 2^{15}$

④ $3 \cdot 2^{16}$　⑤ $3 \cdot 2^{17}$

해설

$a_1 = 4$

$a_2 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 4$

$a_3 = 3 \cdot (a_1 + a_2) = 3 \cdot 16 = 3 \cdot 4^2$

$a_4 = 3(a_1 + a_2 + a_3) = 3 \cdot 64 = 3 \cdot 4^3$

$\vdots$

$a_9 = 3 \cdot 4^8 = 3 \cdot 2^{16}$

32. $a_1 = 1,\ \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + n\,(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① $\dfrac{1}{45}$ ② $\dfrac{1}{46}$ ③ $\dfrac{1}{47}$ ④ $\dfrac{1}{48}$ ⑤ $\dfrac{1}{49}$

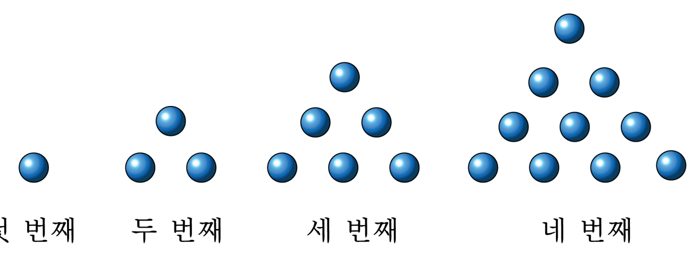
해설

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + n$이므로 $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n^2-n+2}{2}$

$\therefore\ a_n = \dfrac{2}{n^2-n+2}$

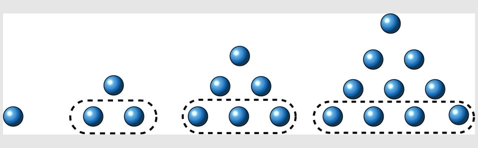
$a_{10} = \dfrac{2}{10^2-10+2} = \dfrac{1}{46}$

33. 바둑알로 다음 그림과 같은 모양을 만들 때, $(n+1)$ 번째 모양에는 n 번째 모양보다 바둑알이 몇 개 더 있는가?



① $n-2$ ② $n-1$ ③ n ④ $n+1$ ⑤ $n+2$

해설



위의 그림에서 두 번째, 세 번째, 네 번째, $\cdots$ 모양에는 각각 바로 앞보다 바둑알이 2개, 3개, 4개, $\cdots$ 더 있으므로 $(n+1)$ 번째 모양에는 n 번째 모양보다 바둑알이 $(n+1)$ 개 더 있다. 즉, n 번째 모양을 이루는 바둑알의 개수가 a_n 개이면 $a_{n+1}-a_n=n+1$ 이다.

34. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 6a_n - 3^{n+1}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_3의 값은?

① -8　　② -9　　③ -10　　④ -11　　⑤ -12

해설

$a_{n+1} = 6a_n - 3^{n+1}$에서
$a_{n+1} = 6a_n - 6 \cdot 3^n + 3 \cdot 3^n$
$a_{n+1} - 3^{n+1} = 6(a_n - 3^n)$
따라서 수열 $\{a_n - 3\}$은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$
공비가 6인 등비수열이다.
$a_n - 3^n = -6^{n-1} \quad \therefore\ a_n = -6^{n-1} + 3^n$
$\therefore\ a_3 = -36 + 27 = -9$