1. 다음 (　　) 안에 알맞은 수는?

1, 5, 9, (　　), 17

① 10　② 11　③ 13　④ 14　⑤ 16

해설

나열된 각 수는 $4n+1$ 의 꼴이다.
따라서 (　) 안에 들어갈 수는 $9+4=13$ 이다.

2. 등차수열 a_n의 일반항이 $a_n = 3n + 2$일 때, 첫째 항 a와 공차 d는?

① $a = -5,\ d = -3$
② $a = -5,\ d = 3$
③ $a = 5,\ d = -3$
④ $a = 5,\ d = 3$
⑤ $a = 5,\ d = 8$

해설

$a_n = 3n + 2$이므로
$a_1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5,$
$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$이므로
$d = a_2 - a_1 = 3$

3. 등차수열 10, 6, 2, -2, -6, $\cdots$ 에서 공차를 d, 제 10항을 b라 할 때, $b+d$의 값은?

① -10 ② -20 ③ -30 ④ -40 ⑤ -50

해설

공차는 -4이므로 $d=-4$

$a_n = 10 + (n-1)(-4) = -4n + 14$

$\therefore a_{10} = -4 \cdot 10 + 14 = -26$에서 $b = -26$

$\therefore\ b + d = -26 + (-4) = -30$

4. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다) 에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

5, (가), 17, (나), (다)

① 10, 22, 27 ② 10, 23, 29 ③ 11, 23, 27
④ 11, 23, 29 ⑤ 12, 24, 29

해설

5와 17의 등차중항은 $\frac{5+17}{2}=11$, 이 수열의 공차는 6이다.
따라서 (가), (나), (다) 에 들어갈 수는 11, 23, 29이다.

5. 세 수 -17, x, 1이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

x는 -17과 1의 등차중항이므로

$2x = -17 + 1 = -16 \quad \therefore\ x = -8$

6. 두 수 3, 7의 조화중항을 x, 두 수 4, 6의 조화중항을 y라고 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x=\frac{2\cdot3\cdot7}{3+7}=\frac{42}{10}$, $y=\frac{2\cdot4\cdot6}{4+6}=\frac{48}{10}$

$x+y=\frac{42}{10}+\frac{48}{10}=\frac{90}{10}=9$

7. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합 $S_{10}=100$이고, 첫째항부터 제 20항까지의 합 $S_{20}=200$일 때, $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

S_{10}은 첫째항부터 제10까지의 합이고, S_{20}은 첫째항부터 제20항까지의 합이므로
$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}=S_{20}-S_{10}$
$=200-100=100$

8. 등비수열 $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \cdots$ 의 일반항 a_n 은?

① $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ ② $\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ ③ $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
④ $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$ ⑤ $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

해설

첫째항이 3이고, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로
$a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

9. 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 끝항이 $\frac{1}{16}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 항의 개수는?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$a_n = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2}$

$n-1=2$

$n=3$

10. 첫째항이 1, 공비가 2, 끝항이 512 인 등비수열의 합은?

① 511 ② 512 ③ 1023 ④ 1024 ⑤ 2047

해설

$512 = 1 \cdot 2^{n-1}$ 에서 $n = 10$

$\therefore a = 1,\ r = 2,\ n = 10$

$\therefore S_{10} = \dfrac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023$

11. 다음 ( )안에 알맞은 것은?

$\frac{3}{2}i,\ \frac{5}{4}i,\ (\quad),\ \frac{9}{8}i,\ \frac{11}{10}i,\ \cdots$

① $\frac{5}{4}i$ ② i ③ $\frac{7}{6}i$ ④ $\frac{8}{6}i$ ⑤ $\frac{6}{7}i$

해설

나열된 복소수의 분모의 수열을 a_n이라 하면 $a_n = 2n$
분자의 수열을 b_n이라 하면 $b_n = (2n+1)i$이다.
따라서 구하는 세 번째의 복소수는 $\frac{7}{6}i$이다.

12. 수열 $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ \cdots$ 의 11 번째 항은?

① -13　② -10　③ 11　④ -11　⑤ 13

해설

주어진 수열은 각 항의 절댓값이 자연수이고, 부호가 교대로 변하는 꼴이다. 따라서 11 번째 항은 11 이다.

13. 다음 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은?

$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots$

① $(-1)^{n+1}\times n$ ② $n-(-1)^n$ ③ $(-1)^n+n$

④ $(-1)^n\times n$ ⑤ $\frac{1}{2}\left\{1-(-1)^n\right\}$

해설

$a_1=-1\cdot 1$

$a_2=(-1)^2\cdot 2$

$a_3=(-1)^3\cdot 3$

$a_4=(-1)^4\cdot 4$이므로

$a_n=(-1)^n\cdot n$

14. 수열 $\log 3, \log 9, \log 27, \cdots$ 의 제 101 항은?

① $10 \log 3$　② $99 \log 3$　③ $100 \log 3$
④ $101 \log 3$　⑤ $102 \log 3$

해설

$a_1 = \log 3$
$a_2 = \log 9 = 2 \log 3$
$a_3 = \log 27 = 3 \log 3$
$\vdots$
$a_n = n \log 3$
$\therefore a_{101} = 101 \log 3$

15. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_4 : a_9 = 2 : 5$일 때, a_{15}의 값은?

① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

해설

첫째항을 a라 하면 $a_n = a + (n-1) \cdot 3$이므로
$a_4 = a + 9,\ a_9 = a + 24$
이때, $(a+9) : (a+24) = 2 : 5$에서
$5(a+9) = 2(a+24)$
$\therefore\ a = 1$
$\therefore\ a_{15} = 1 + (15-1) \cdot 3 = 43$

16. 두 수 48과 2사이에 10개의 수 $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_{10}$을 넣어 12개의 수 48, $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_{10}$, 2가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$의 값은?

① 200 ② 250 ③ 300 ④ 350 ⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은 $\dfrac{12(48+2)}{2} = 300$이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 300 - (48+2) = 300 - 50 = 250$

17. $a,\ -6,\ b,\ -12$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

b는 -6과 -12의 등차중항이므로

$b=\frac{-6+(-12)}{2}=-9$

따라서 이 수열은 공차가 -3인 등차수열이다.

$a+(-3)=-6$에서 $a=-3$

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{-9}{-3}=3$

18. 수열 $-3,\ a,\ b,\ c,\ 13$이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

해설

$a-(-3)=d$
$b-a=d$
$c-b=d$
$13-c=d$
좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리
더하면 $13-(-3)=4d\ \therefore d=4$
$\therefore a=-3+4=1$
$b=1+4=5$
$c=5+4=9$
$\therefore a+b+c=15$

19. 첫째항이 -25, 공차가 3인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항 ② 제 10항 ③ 제 11항
④ 제 12항 ⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면
$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$
이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은
$3n - 28 > 0,\ 3n > 28$
$\therefore\ n > \frac{28}{3} = 9.33\cdots$
따라서 자연수 n의 최솟값은 10이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

20. 다음 수열이 조화수열을 이룰 때, (가) 에 알맞은 수는?

6, 3, 2, (가)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 수열이 조화수열이면 각 항의 역수로 이루어진 수열 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{(\text{가})}$ 이 등차수열이므로 이 등차수열의 공차는 $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{(\text{가})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ $\therefore$ $(\text{가}) = \frac{3}{2}$

21. 조화수열 12, 6, 4, 3, $\cdots$ 의 일반항은?

① $\frac{12}{n}$　② $\frac{8}{n}$　③ $\frac{6}{n}$　④ $\frac{3}{n}$　⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \cdots$

$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \cdots$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$\therefore\ a_n = \frac{12}{n}$

22. 첫째항이 1이고 공차가 자연수 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $n \geq 3$일 때, $S_n = 94$를 만족하는 d의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$S_n = 94$에서 $\frac{n\{2+(n-1)d\}}{2} = 94$

$n\{2+(n-1)d\} = 2 \cdot 94 = 2^2 \cdot 47$

그런데 $n \geq 3$이므로 n의 값이 될수 있는 것은 4, 47, 94, 188 이다.

$n = 4$일때, $2+(4-1)d = 47$ $\quad \therefore\ d = 15$

$n = 47$일때, $2+(47-1)d = 4$ $\quad \therefore\ d = \frac{2}{23}$

$n = 94$일때, $2+(94-1)d = 2$ $\quad \therefore\ d = 0$

$n = 188$일때, $2+(188-1)d = 1$ $\quad \therefore\ d = -\frac{1}{187}$

이 중에서 d가 자연수가 되는 것은 $n = 4$이므로 $d = 15$

23. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, $a_4 + a_7$의 값은?

① 12　② 18　③ 24　④ 30　⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\frac{10(2a+9d)}{2} = 120 \quad \therefore\ 2a+9d = 24$

$a_4 + a_7 = (a+3d) + (a+6d) = 2a+9d = 24$

24. 수열 $1,\ -10,\ 10^2,\ -10^4, \cdots$ 은 첫째항이 a, 공비가 r 인 등비수열이다. 이 때, $a+r$ 의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

해설

$a=1,\ r=-10$

$\therefore a+r=-9$

25. 등비중항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, $\square$안에 알맞은 수를 모두 더하면?

$$-2,\ \square,\ -8,\ \square,\ \square,\ 64, \cdots$$

① -11　② -12　③ 11　④ 12　⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b라 하면 $b^2 = (-2) \times (-8)$, $b^2 = 16$
따라서 $b = 4$이고 공비는 -2인 수열이 되므로 구하는 수열은
$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ 64,\ \cdots$
$\therefore\ 4 + 16 - 32 = -12$

26. 오른쪽 표에서 가로줄, 세로줄 각각이 모두 등비수열을 이룰 때, $a+b+c+d$의 값은?(단, a, b, c, d는 양수)

1	3	a
2	b	18
c	12	d

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

1	3	9
2	6	18
4	12	36

$a+b+c+d=9+6+4+36=55$

27. 양수 a, b에 대하여 세 수 $\log 2$, $\log a$, $\log 8$이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 16이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$2\log a = \log 2 + \log 8$

$a^2 = 16, \quad \therefore\ a = 4$

$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore\ b = 8$

$a + b = 4 + 8 = 12$

28. 오각형의 다섯 개의 내각을 각각 v, w, x, y, z라 하면 $v < w < x < y < z$ 이고 순서대로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, x의 값은?

① 92° ② 108° ③ 112° ④ 121° ⑤ 138°

해설

오각형의 내부는 세 개의 삼각형으로 나누어지므로
그 내각의 총합은 $v + w + x + y + z = 540°$ 이다.
또한 각 내각을 등차수열의 각 항으로 표현하면
d를 공차로 생각하여 $x - 2d$, $x - d$, x, $x + d$, $x + 2d$와 같이
표현할 수 있다. 이것을 위 식에 대입하면
$(x-2d)+(x-d)+x+(x+d)+(x+2d) = 540°$ 이므로 $x = 108°$
이다.

29. 세 수 α, p, β는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 α, $2\sqrt{q}$, β는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 근을 α, β로 나타내면?

① $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\beta}{4}$　② $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$　③ α, β

④ 2α, 2β　⑤ 4α, 4β

해설

α, p, β는 이 순서로 등차수열을 이루므로

$p = \frac{\alpha + \beta}{2}$

α, $2\sqrt{q}$, β는 이 순서로 등비수열을 이루므로

$(2\sqrt{q})^2 = \alpha\beta$, $4q = \alpha\beta$ $\therefore q = \frac{\alpha\beta}{4}$

$x^2 - px + q = 0$에서

$x^2 - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)x + \left(\frac{\alpha\beta}{4}\right) = 0$

$\therefore \left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x - \frac{\beta}{2}\right) = 0$

따라서 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 근은 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$이다.

30. 서로 다른 세 실수 9, a, b는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 a, 9, b는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① $-\frac{45}{2}$ ② $-\frac{48}{2}$ ③ $-\frac{41}{2}$ ④ $-\frac{39}{2}$ ⑤ $-\frac{37}{2}$

해설

서로 다른 세 실수 9, a, b가 등차수열을 이루므로

$a=\frac{9+b}{2}$ ……㉠

세 수 a, 9, b가 등비수열을 이루므로

$9^2=ab$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$81=\frac{9+b}{2}\cdot b$, $b^2+9b-162=0$

$(b+18)(b-9)=0$

$\therefore b=-18$ 또는 $b=9$

즉, $b=-18$일 때 $a=-\frac{9}{2}$이고, $b=9$일 때 $a=9$

이때, a, b는 서로 다른 실수이므로

$a=-\frac{9}{2}$, $b=-18$

$\therefore a+b=-\frac{45}{2}$

31. $a_1 = 1$ 이고, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 m 이 짝수일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{m-1} = 85$, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots a_m = 170$ 이다. 이때, $r + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$m = 2k$(k는 자연수) 라고 하자.

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$

$= \dfrac{a_1(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = \dfrac{r^{2k} - 1}{r^2 - 1} = 85 \cdots$ ㉠

$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k}$

$= \dfrac{a_2(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = 170 \cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r = 2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2^{2k} - 1}{3} = 85,\ 2^{2k} = 256 = 2^8$

따라서 $2k = m = 8$

$r + m = 10$

32. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합이 5, 첫째항부터 제 20항까지의 합이 30일 때, 첫째항부터 제 30항까지의 합은?

① 124 ② 132 ③ 145 ④ 155 ⑤ 162

해설

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 5$$

$$S_{20} = \frac{a(r^{20}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1} = 30$$

$r^{10}+1=6$이므로 $r^{10}=5$

$$S_{30} = \frac{a(r^{30}-1)}{r-1}$$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$이므로

$$\begin{aligned} S_{30} &= \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1} \\ &= 5\cdot(r^{20}+r^{10}+1) \\ &= 5\cdot(5^2+5+1) \\ &= 5\cdot 31 = 155 \end{aligned}$$

33. 다항식 $x^9+x^8+\cdots+x+1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는?

① 511 ② 512 ③ 513 ④ 1023 ⑤ 1025

해설

$f(x)=x^9+x^8+\cdots+x+1$이라 하면
$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$이다.
즉, $f(2)=2^9+2^8+\cdots+2+1$
따라서 $f(2)$는 첫째항이 1, 공비가 2, 항수가 10인 등비수열의 합과 같다.
$\therefore f(2)=\dfrac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1=1023$

34. 수열 8, 4, 2, $\frac{1}{2}$, $\cdots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11항　② 제12항　③ 제13항
④ 제14항　⑤ 제15항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$

35. 매출액이 매년 일정한 비율로 증가하는 기업이 있다. 지난 10년간 매출액의 증가율이 69% 일 때, 처음 5년간 매출액의 증가율은?

① 13% ② 15% ③ 20% ④ 24% ⑤ 30%

해설

매년 매출액의 증가비율을 a라 하자

$(1+a)^{10} = 1.69$일 때

$$(1+a)^5 = \sqrt{1.69} = \sqrt{1.3^2}$$
$$= 1.3$$이므로

1.3배로 증가하였다.

따라서 증가율은 30%

36. 광이가 첫째 날에 2원, 둘째 날에 6원, 셋째 날에 18원, $\cdots$ 과 같이 매일 전날의 3배씩 30일 간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

① $3^{30}-2$원　② $3^{30}-1$원　③ 3^{30}원
④ $3^{30}+1$원　⑤ $3^{30}+2$원

해설

전날의 3배씩 모으므로 공비 $r=3$

$a=2,\ r=3$

$$\therefore\ S_{30}=\frac{2\cdot(3^{30}-1)}{3-1}=3^{30}-1$$

37. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times(1.04)^1$

(10년후 원리합계)

$= 1000$만$\times 1.04^{10}$

$= 1000$만 $\times 1.48$

$= 1480$만 (원)

38. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 2n + 4$로 나타내어지는 수열에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이다.

② 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이다.

③ 첫째항이 3, 공차가 −2인 등차수열이다.

④ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.

⑤ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 −2인 등차수열이다.

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 2n + 4 - \left\{(n-1)^2 - 2(n-1) + 4\right\} \\ &= 2n - 3 (n \geq 2) \end{aligned}$$

그런데 $a_1 = S_1 = 3$이므로 이 수열의 첫째항은 3이고, 둘째항은 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.

39. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $\log_3(S_n + 1) = n$을 만족할 때, a_3의 값은?

① 6 ② 10 ③ 14 ④ 18 ⑤ 22

해설

$3^n = S_n + 1$

$S_n = 3^n - 1$

$S_{n-1} = 3^{n-1} - 1$

$$\begin{aligned} a_n &= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \ (n \geq 2) \\ &= 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1 \\ &= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

$a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$

40. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 1$일 때, $a_1 + a_4$의 값은?

① 111　② 112　③ 113　④ 114　⑤ 115

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ ……㉠
$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 1 - (2 \cdot 3^{n-1} - 1) = 4 \cdot 3^{n-1}$ ……㉡
그런데 ㉡에 $n = 1$을 대입하면 ㉠과 다르므로 이 수열은 제2항부터 등비수열을 이룬다.
$\therefore a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ $(n \geq 2)$, $a_1 = 5$
$\therefore a_1 + a_4 = 5 + 4 \cdot 3^3 = 113$

41. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{10},\ 10$
$1,\ b_1,\ b_2,\ b_3, \cdots,\ b_{20},\ 10$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}$ 의 값은?

① $\dfrac{10}{21}$ ② $\dfrac{10}{20}$ ③ $\dfrac{20}{11}$ ④ $\dfrac{21}{11}$ ⑤ 2

해설

$a'_n = 1 + (n-1) \times d$

$a'_{12} = 1 + 11d = 10$

$d = \dfrac{9}{11}$

$\therefore a'_n = 1 + (n-1) \times \dfrac{9}{11}$

$b'_n = 1 + (n-1) \times d$

$b'_{22} = 1 + 21d = 10$

$d = \dfrac{9}{21}$

$\therefore b'_n = 1 + (n-1) \times \dfrac{9}{21}$

$$\frac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1} = \frac{a'_{11}-a'_2}{b'_{11}-b'_2} = \frac{9 \cdot \frac{9}{11}}{9 \cdot \frac{9}{21}} = \frac{21}{11}$$

42. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 제 n항까지의 합을 각각 A_n, B_n이라 한다. $A_n : B_n = (3n+6) : (7n+2)$일 때, $a_7 : b_7$을 구하면? (단, n은 자연수)

① 5 : 17　　② 15 : 31　　③ 17 : 9

④ 31 : 15　　⑤ 49 : 50

해설

a_n의 일반항을 $a+(n-1)d_1$

b_n의 일반항을 $b+(n-1)d_2$로 놓으면

$A_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d_1\}$,

$B_n = \frac{n}{2}\{2b+(n-1)d_2\}$

$\frac{2a+d_1n-d_1}{2b+d_2n-d_2} = \frac{3n+6}{7n+2} = \frac{3kn+6k}{7kn+2k}$,

$d_1 = 3k,\ 2a-d_1 = 6k$(k는 비례상수)

따라서 $2a = 9k,\ a = \frac{9}{2}k$

$\therefore\ a_n = \frac{9}{2}k + (n-1)3k$

$d_2 = 7k,\ 2b-d_2 = 2k,\ b = \frac{9}{2}k$

$\therefore\ b_n = \frac{9}{2}k + (n-1)7k$

$\therefore\ a_7 : b_7 = \left(\frac{9}{2}k+18k\right) : \left(\frac{9}{2}k+42k\right)$

$= \frac{45}{2}k : \frac{93}{2}k = 15 : 31$

43. 4 와 6 으로 나누어떨어지는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 41400

해설

4 와 6 으로 나누어떨어지는 수는 4 와 6 의 최소공배수인 12 로 나누어떨어지는 수이므로 $12n$(n은 자연수) 의 꼴이다.
이때, $100 \le 12n \le 1000$ 이므로
$8.\times\times \le n \le 83.\times\times$
$\therefore\ n = 9, 10, 11, \cdots, 83$
그런데 $n = 9$ 일 때, $12n = 108$,
$n = 83$ 일 때, $12n = 996$ 이므로 조건을 만족하는 수는 첫째항이 108, 끝항이 996, 항수가 $83 - 8 = 75$ 인 등차수열이다.
따라서 구하는 총합은 $\dfrac{75(108 + 996)}{2} = 41400$

44. 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 10$ 이고 $S_9 > 0,\ S_{10} < 0$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $-5 < d < -4$

㉡ $a_5 > 0,\ a_6 < 0$

㉢ a_1 이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$ 이다.

① ㉠　② ㉢　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_3 = a_1 + 2d = 10$ 에서 $a_1 = 10 - 2d$

$S_9 = \dfrac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0$ 에서 $a_1 + 4d > 0$

$10 - 2d + 4d > 0$

$\therefore\ d > -5$

$S_{10} = \dfrac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0$ 에서 $2a_1 + 9d < 0$

$2(10 - 2d) + 9d < 0$

$\therefore\ d < -4$

$\therefore -5 < d < -4$(참)

㉡ $a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$

㉠에서 $-10 < 2d < -8$ 이므로

$0 < 10 + 2d < 2$

즉, $0 < a_5 < 2$

$a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$

$-15 < 3d < -12$ 이므로

$-5 < 10 + 3d < -2$

즉, $-5 < a_6 < -2$

$\therefore\ a_5 > 0,\ a_6 < 0$(참)

㉢$a_1 = 10 - 2d$ 이므로

$-5 < d < -4$ 에서 $18 < 10 - 2d < 20$

즉, $18 < a_1 < 20$

a_1 이 정수이므로 $a_1 = 19$

$a_1 + 2d = 10$ 에서 $d = -\dfrac{9}{2}$

$\therefore\ a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\dfrac{9}{2}\right) = -17$

$\therefore\ a_1 + a_9 = 2 \neq 0$(거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

45. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = (n+1)^2 - 4n$일 때,
$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{101}$의 값은?

① 3960 ② 4010 ③ 4500 ④ 5000 ⑤ 5050

해설

$S_n = (n+1)^2 - 4n = (n-1)^2$이므로
$a_n = S_n - S_{n-1}(n \geq 2)$
$= (n-1)^2 - (n-2)^2 = 2n - 3$
그런데 $a_1 = S_1 = 0$이고, $a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{101}$은 첫째항이 3이고, 공차가 4인 등차수열의 합이다.
이때, 항수는 $2n + 1 = 101$에서 $n = 50$이므로
$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{101}$
$= 0 + \dfrac{50(2 \cdot 3 + 49 \cdot 4)}{2} = 5050$

46. 수학자 드 므와브르에 대하여 다음과 같은 일화가 전해지고 있다.

> 드 므와브르는 자신의 수면 시간이 매일 15분씩 길어진다는 것을 깨닫고, 수면 시간이 24시간이 되는 날을 계산하여 그날에 자신이 죽을 것이라고 예측하였다. 그런데, 놀랍게도 그날에 수면하는 상태에서 생을 마쳤다.

드 므와브르가 매일 밤 12시에 잠든다고 가정할 때, 처음 이 사실을 알게 된 날의 수면시간이 14시간이었다면 그날부터 생을 마칠 때까지 깨어있는 시간의 합은?

① 197 ② 205 ③ 214 ④ 224 ⑤ 235

해설

이 사실을 알게 된 날을 첫째 날로 하여 드 므와브르가 깨어 있는 시간을 수열 $\{a_n\}$이라고 하면 a_n은 $a_1 = 10$(시간)이고 공차가 $-\frac{1}{4}$(시간)인 등차수열이다.

24시간 계속 수면하게 되는 날은 깨어 있는 시간이 0시간이므로

$a_n = 10 - \frac{1}{4}(n-1) = 0$

$\therefore\ n = 41$

$\therefore$ 깨어있는 시간의 합은 $\frac{41(10+0)}{2} = 205$(시간)이다.

47. 다섯 개의 실수 a, b, c, d, e를 적당히 배열하여 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다. a, b, c, d, e가 다음 조건을 만족시킬 때, b가 이 수열의 제 n항이라 하면 n의 값은?

(가) $e = \sqrt{cd}$ (나) $\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$ (다) $a < b$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

조건 (가)에서 $e = \sqrt{cd}$이므로 $e^2 = cd$, 즉, e는 c, d의 등비중항이므로 c, e, d 또는 d, e, c의 순서대로 등비수열을 이룬다.
조건 (나)에서 $\frac{a}{e} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = ce$이므로 a, c, e, d 또는 d, e, c, a의 순서대로 등비수열을 이룬다.
조건 (다)에서 $a < b$이므로 a, c, e, d, b 또는 d, e, c, a, b이므로 b는 항상 제 5항이다.

48. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다.
$a_n = 2n,\ b_n = 5n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 공통인 항을 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$이라 한다. 이때, C_{41}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 412

해설

$a_6 = b_2 = 12,$
$a_{11} = b_4 = 22,$
$a_{16} = b_6 = 32,\ \cdots$ 이므로
수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 12, 공차가 10인 등차수열이다.
$\therefore\ c_{41} = 12 + 40 \cdot 10 = 412$

49. A 도시의 인구는 매년 일정한 비율로 증가하여 10년 후에는 6만 명, 20년 후에는 9만 명이 될 것으로 예상된다. 이때, A 도시의 30년 후의 인구는?

① 12.5만 명　② 13만 명　③ 13.5만 명
④ 14만 명　⑤ 14.5만 명

해설

A 도시의 올해 인구를 a, 인구 증가율을 r라 하면 n년 후의 인구는
$a(1+r)^n$ 명이다.
10년 후의 인구가 6만 명이므로
$a(1+r)^{10} = 6 \times 10^4 \ \cdots\cdots$ ㉠
20년 후의 인구가 9만 명이므로
$a(1+r)^{20} = 9 \times 10^4 \ \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(1+r)^{10} = \frac{3}{2}$
30년 후의 인구는
$a(1+r)^{30} = a(1+r)^{10}\left\{(1+r)^{10}\right\}^2$
$60000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{270000}{2} = 135000$(명)
따라서 13.5만 명이 된다.

50. 매월 초에 일정한 금액을 월이율 1%, 한 달마다 복리로 적립하여 5년 후에 2000만원을 만들려고 한다. 매달 얼마씩 적립해야 하는가?(단, $1.01^{60} = 1.8$로 계산하고, 천 원 단위에서 반올림한다.)

① 22만원 ② 24만원 ③ 25만원
④ 27만원 ⑤ 28만원

해설

매월 초에 a원씩 월이율 1%, 한 달마다 복리로 5년 동안 적립하여 2000만원을 만들어야 하므로

$$a(1+0.01)+a(a+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{60}=20000000$$

$$\frac{a(1+0.01)\left\{(1+0.01)^{60}-1\right\}}{(1+0.01)-1}=20000000$$

$$=\frac{1\times 1.01\times(1.8-1)}{0.01}=20000000$$

$80.8a = 20000000$

$\therefore\ a \fallingdotseq 250000$

따라서 매월 적립해야 할 금액은 25만원이다.