1. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 일 때, $x \in X$ 인 임의의 x 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \to 1$

② $x \to |x|$

③ $x \to x^2 + 1$

④ $x \to 2x$

⑤ $x \to x^2 + x + 1$

해설

④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

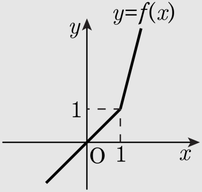
$f(x) = \begin{cases} x & (x \le 1) \\ ax+b & (x > 1) \end{cases}$ 가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 a, b의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

① $a=1,\ b=-1$ ② $a=1,\ b=1$ ③ $a=2,\ b=-1$

④ $a=2,\ b=0$ ⑤ $a=-1,\ b=2$

해설

f가 일대일대응이 되려면
$y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.
즉, 직선 $y=ax+b$가
점 $(1,\ 1)$을 지나야 하므로
$a+b=1 \quad \cdots$ ㉠
또, 직선 $y=x$의 기울기가 양이므로 직선
$y=ax+b$의 기울기도 양이어야 한다.
$\therefore\ a>0 \quad \cdots$ ㉡
따라서 주어진 보기 중 ㉠, ㉡을
모두 만족시키는 것은 ③이다.



3. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\therefore \ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

4. 함수 $f(x)=2x+6$, $g(x)=ax-1$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 6

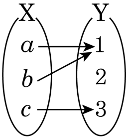
해설

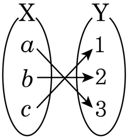
$$(f\circ g)(x)=2g(x)+6=2(ax-1)+6$$
$$=2ax+4 \quad \cdots ㉠$$
$$(g\circ f)(x)=af(x)-1=a(2x+6)-1$$
$$=2ax+6a-1 \quad \cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서 $2ax+4=2ax+6a-1$

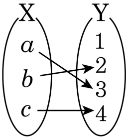
$4=6a-1$

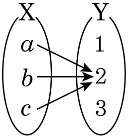
$\therefore\ a=\frac{5}{6}$

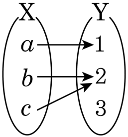
5. 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 고르면?

①


②


③


④


⑤


해설

주어진 함수 중 일대일대응인 것은 ②번이다.

6. 함수 $y = x^2 - 2x$ $(x \geq 1)$의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 2x$ $(x \geq 1)$

② $y = x^2 - 2x$ $(x \leq 1)$

③ $y = \sqrt{x+1}$ $(x \geq -1)$

④ $y = \sqrt{x+1} + 1$ $(x \geq -1)$

⑤ $y = \sqrt{-x+1} + 1$ $(x \leq 1)$

해설

$y = x^2 - 2x$에서 $x^2 - 2x + 1 = y + 1$

$(x-1)^2 = y + 1$, $x - 1 = \sqrt{y+1}$ $(\because x \geq 1)$

$\therefore x = \sqrt{y+1} + 1$

x와 y를 바꾸어 쓰면 $y = \sqrt{x+1} + 1$

이 때, 원래의 함수

$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ $(x \geq 1)$의 치역

$\{y | y \geq -1\}$ 이

역함수 $y = \sqrt{x+1} + 1$의 정의역이 되므로

구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+1} + 1$ $(x \geq -1)$

7. 다음 중 일반적으로 성립하는 성질이 아닌 것은 무엇인가?

① $g \circ f = f \circ g$

② $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

③ $(f^{-1})^{-1} = f$

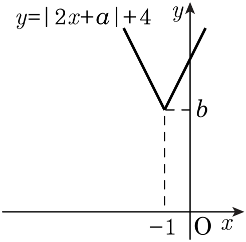
④ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

⑤ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

해설

합성함수의 성질에서
교환법칙은 성립하지 않는다.

8. 함수 $y=|2x+a|+4$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 점 $(-1, b)$ 를 지난다. 이때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하면?



① 2　　② 4　　③ 6

④ 8　　⑤ 10

해설

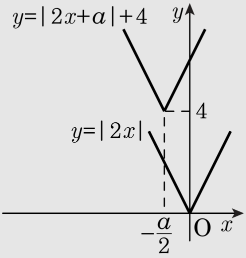
$y=|2x+a|+4$

$=\left|2\left(x+\frac{a}{2}\right)\right|+4$

즉, 함수 $y=|2x+a|+4$ 의 그래프는 함수 $y=|2x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$-\frac{a}{2}$ 만큼,

y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.



이때, 그래프의 꺾인 점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, 4\right)$ 이고,

문제에서 $(-1, b)$ 이므로

$-\frac{a}{2}=-1,\ b=4$

$\therefore\ a=2,\ b=4 \qquad \therefore\ ab=8$

9. $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수 a와 b가 있다. 이때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$ 의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4}$$
$$= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}$$

따라서 $a-b=1,\ -2(a+b)=6$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-1-2=-3$

10. 분수식 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}$ 을 간단히 하면?

① 1　　② $1-a$　　③ $1-a^2$

④ $1+a^2$　　⑤ $1+a$

해설

준식 $= \dfrac{1}{1-\dfrac{a}{a-1}} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{a}{a+1}}$

$= \dfrac{a-1}{a-1-a} \times \dfrac{a+1}{a+1-a}$

$= \dfrac{a-1}{-1} \times \dfrac{a+1}{1} = 1-a^2$

11. $x : y = 4 : 3$ 일 때, $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ 의 값은?

① $\dfrac{7}{25}$ ② $\dfrac{9}{25}$ ③ $\dfrac{11}{25}$ ④ $\dfrac{13}{25}$ ⑤ $\dfrac{16}{25}$

해설

$x : y = 4 : 3$ 에서 $x = 4k,\ y = 3k(k \neq 0)$ 라고 하면

$\therefore$ (준식) $= \dfrac{16k^2 - 9k^2}{16k^2 + 9k^2} = \dfrac{7}{25}$

12. 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정하면?

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + \sqrt{x-1}$$

① $-2 \le x \le 1$ ② $0 \le x \le 1$ ③ $1 < x < 2$

④ $-1 \le x \le 2$ ⑤ $1 \le x \le 2$

해설

$x+1 \ge 0 \quad \therefore x \ge -1$

$2-x \ge 0 \quad \therefore x \le 2$

$x-1 \ge 0 \quad \therefore x \ge 1$

공통부분을 구하면 $1 \le x \le 2$

13. $-1 < x < 1$ 일 때, $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(\text{준식}) = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$$
$$= |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2$$

14. 함수 $y=\dfrac{2+x}{1-2x}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a, y=b$ 일 때, a 의 값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

$$y=\frac{x+2}{-2x+1}$$

$$=\frac{x+2}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$$

15. $y = \sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6} - 2$과 일치한다. $n - m$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = \sqrt{2x+6} - 2 = \sqrt{2(x+3)} - 2$이므로
$y = \sqrt{2x}$를 x축으로 -3만큼
y축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.
따라서 $m = -3$, $n = -2$ 이므로
$\therefore n - m = 1$

16. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{y \mid y$는 정수$\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(n)=(n^3$을 7로 나눈 나머지$)$로 정의할 때, 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$1^3=1$
즉 나머지 : 1
$2^3=7\times1+1$
즉 나머지 : 1
$3^3=27=7\times3+6$
즉 나머지 : 6
$4^3=64=7\times9+1$
즉 나머지 : 1
$5^3=125=7\times17+6$
즉 나머지 : 6
따라서 치역은 $\{1,\ 6\}$
$\therefore$ 치역의 모든 원소의 합은 7이다.

17. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음과 같을 때, $(f \circ f)(x)$ 의 값은 얼마인가?

$$f(x) = \begin{cases} x & (x\text{가 유리수일 때}) \\ 3 - x & (x\text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

① x　　② $3 - x$　　③ $x - 3$　　④ 0　　⑤ 3

해설

(i) x가 유리수일 때, $f(x) = x$ 이므로,

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$

(ii) x가 무리수일 때,

$f(x) = 3 - x$ 로 무리수이므로,

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3 - f(x) = 3 - (3 - x) = x$

(i), (ii) 에 의하여 $(f \circ f)(x) = x$

18. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \quad \cdots \quad f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} = x$$ 이므로

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore \; f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

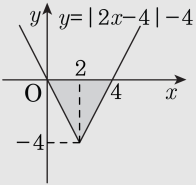
19. 함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

절대값 기호 안을 0으로 하는 x의 값은



$2x-4=0$ 에서 $x=2$

(ⅰ) $x<2$ 일 때, $y=-(2x-4)-4=-2x$

(ⅱ) $x\geq 2$ 일 때, $y=(2x-4)-4=2x-8$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

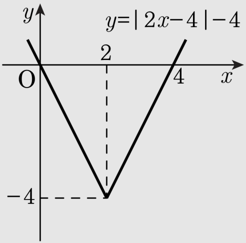
20. 함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=|2x-4|-4=|2(x-2)|-4$ 의 그래프는
$y=|2x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로
다음 그림과 같다.



따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$

21. 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}\cdots ①$$

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\left\{x^2-(z+y)x+zy\right\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

22. $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{13\times 14}=\frac{a}{14}$ 에서 a의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 13

해설

$$준식=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots-\frac{1}{14}=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$$

$\therefore a=13$

23. $2+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\dfrac{803}{371}$ 일 때, 자연수 $k,\ m$의 값에 대하여 $k+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$\frac{803}{371}=2+\frac{61}{371}=2+\cfrac{1}{\cfrac{371}{61}}$$

$$=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{5}{61}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{61}{5}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{5}}}$$

따라서 $k=6,\ m=12$

$\therefore k+m=18$

24. 0이 아닌 실수 x, y가 $\dfrac{x-y}{4x+2y}=\dfrac{1}{3}$을 만족할 때, 유리식 $\dfrac{x^2-5y^2}{2xy}$이 값은?

① -2 ② 1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$$\frac{x-y}{4x+2y}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3x-3y=4x+2y \qquad x=-5y$$

$$\therefore \ \frac{x^2-5y^2}{2xy}=\frac{20y^2}{-10y^2}=-2$$

25. 0이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여 $\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}$를 만족할 때, $\frac{(x+y)^2-z^2}{x^2-y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$(m, n은 서로소인 정수)이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}=k$ 라 하자

$\Rightarrow x+y=5k,\ y+z=6k,\ z+x=7k$

세 식을 모두 더하여 정리하면 $x+y+z=9k$

다시 식에 대입하면 $x=3k,\ y=2k,\ z=4k$

$$(\text{준식})=\frac{(x+y)^2-z^2}{x^2-y^2+z^2}$$

$$=\frac{25k^2-16k^2}{9k^2-4k^2+16k^2}=\frac{3}{7}$$

$\therefore m=7,\ n=3$

$\therefore m+n=10$

26. 무리수 $\sqrt{3-\sqrt{8}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $n < a - b < n + 1$을 만족하는 n의 값을 구하여라. (단, n은 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

정수 부분(a) : 0, 소수 부분(b) : $\sqrt{2}-1$

$n < 0-\sqrt{2}+1 < n+1$

$n-1 < -\sqrt{2} < n$

$n-1 < -1.414\cdots < n$

$\therefore\ n = -1$

27. x, y가 유리수이고, 등식 $x^2 + \sqrt{3}y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y - 3 - 3\sqrt{3} = 0$이 성립할 때, 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

주어진 등식을 $\sqrt{3}$에 대하여 정리하면

$(x^2 - 2x - 3) + (y^2 + 2y - 3)\sqrt{3} = 0$

여기서, $x^2 - 2x - 3$, $y^2 + 2y - 3$ 이 모두 유리수이고 $\sqrt{3}$ 이 무리수이므로

$x^2 - 2x - 3 = 0$이고, $y^2 + 2y - 3 = 0$

즉,$(x-3)(x+1) = 0$이고 $(y+3)(y-1) = 0$

$\therefore\ x = 3$ 또는 $x = -1$ 이고 $y = -3$ 또는 $y = 1$

따라서, 구하는 x, y의 쌍은

$(x,\ y) = (3,\ 1),\ (3,\ -3),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -3)$

28. 함수 $y = \dfrac{2x-7}{x-2}$ 의 그래프와 함수 $y = \dfrac{k}{x}$ 의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있다. 이 때, 상수 k의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$y = \frac{2x-7}{x-2} = \frac{2(x-2)-3}{x-2} = -\frac{3}{x-2} + 2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \dfrac{-3}{x}$ 의

그래프를 x축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore\ k = -3$

29. 점 $(0, 1)$을 지나고 점근선이 $x = -2$, $y = 2$인 함수 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 다음 중 어느 것을 평행이동한 것인가?

① $y = -\dfrac{1}{x}$　② $y = -\dfrac{2}{x}$　③ $y = -\dfrac{3}{x}$

④ $y = \dfrac{1}{x}$　⑤ $y = \dfrac{2}{x}$

해설

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$의 점근선이 $x = -2$, $y = 2$이므로

$y = \dfrac{k}{(x+2)} + 2$로 놓을 수 있고

이것이 점$(0, 1)$를 지나므로

$1 = \dfrac{k}{2} + 2$

$\therefore\ k = -2$

따라서 $y = \dfrac{-2}{x+2} + 2$이므로

이 그래프는 $y = -\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

30. 함수 $y = \dfrac{ax+1}{2x+b}$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭일 때, a, b 사이의 관계식은? (단, a, b 는 상수이다.)

① $a-b=0$ ② $a+b=0$ ③ $a-b=1$
④ $a+b=1$ ⑤ $ab=1$

해설

$y = \dfrac{ax+1}{2x+b}$ $\cdots$ ㉠의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 역함수의 그래프와 일치한다.

역함수를 구하면 $y = \dfrac{-bx+1}{2x-a}$ 이므로

이것이 ㉠과 같으려면

$\dfrac{ax+1}{2x+b} = \dfrac{-bx+1}{2x-a}$ 에서 $a = -b$

$\therefore a+b=0$

31. 다음 보기에서 무리함수 $y = -\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a = -1$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.

㉡ $a > 0$이면 치역은 $\{y \mid y \le 1\}$이다.

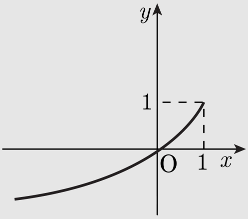
㉢ $a < 0$이면 치역은 $\{y \mid y \le 1\}$이다.

㉣ $y = \sqrt{x}+1$의 그래프와 만날 수 있다.

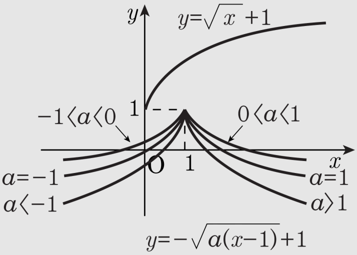
① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉡, ㉣

해설

㉠ $a = -1$이면 주어진 무리함수는
$y = -\sqrt{-(x-1)}+1$
$y = -\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼,
y축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 그래프는 오른쪽과 같다.
따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



㉡, ㉢ $a > 0$ 또는 $a < 0$일 때
항상 $\sqrt{a(x-1)} \ge 0$이므로 치역은 $\{y \mid y \le 1\}$
㉣ $y = -\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프는
아래와 같으므로 $y = \sqrt{x}+1$의
그래프와 만나지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.



32. $a \le x \le 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x}+1$ 의 최솟값이 m, 최댓값이 6 이다. 이때, $m-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

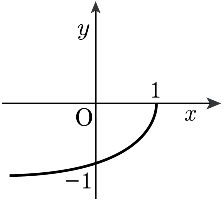
해설

함수 $y = \sqrt{3-2x}+1 = \sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
이 함수는 감소함수이다.
따라서, $x = a$에서 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{3-2a}+1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$
$\therefore a = -11$
또한, $x = 1$에서 최솟값을 가지므로
$m = \sqrt{3-2\times1}+1 = 2$
$\therefore m-a = 13$

33. $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

점$(1,0)$에서 시작이므로 $-\frac{b}{a}=1,\ c=0$

$\therefore b=-a,\ c=0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y=-\sqrt{ax-a}$이고

주어진 그래프가 점$(0,-1)$를 지나므로

$-1=-\sqrt{-a}$

양변을 제곱을 하면 $1=-a$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=0$이므로

$a+b+c=-1+1+0=0$

34. 점 (1, 2) 가 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ $(a \neq 0)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프 위에 있을 때, $2a+b$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수는 $x = \sqrt{ay+b}$
이 그래프가 점 (1, 2)를 지나므로
$1 = \sqrt{2a+b}$
$\therefore 2a+b=1$

35. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 6)$을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 11 개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때

$2 = \sqrt{2k}, \quad 2k = 4$

$\therefore k = 2$

또, 함수 $y = \sqrt{kx}$의 그래프가 점 $(3,\ 6)$을 지날 때

$6 = \sqrt{3k}, \quad 3k = 36$

$\therefore k = 12$

따라서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$2 \le k \le 12$ 이므로

정수 k는 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 12$ 의 11개다.

36. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(i) $f(2x) = f(x)\ (x = 1, 2, 3, \ldots)$ (ii) $f\,(2x+1) = 2^x\ (x = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

해설

$1280 = 2^8 \cdot 5$ 이므로,

$$f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \cdots = f(5)$$
$$= f(2 \cdot 2 + 1)\text{이므로,}$$

$$f\,(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$$

37. 집합 $U = \{1,2,3,4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U$, $X \cap Y = \varnothing$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 12 개

해설

$U = \{1,2,3,4\}$ 에서 $X,\ Y \subset U,\ X \cup Y = U,$
$X \cup Y = \varnothing$ 이다.
$f\ :\ X\ \rightarrow\ Y$ 이 일대일 대응이 되려면
$n(X) = n(Y)$
$n(X \cup Y) = n(U) = 4,\ X \cup Y = \varnothing$ 이므로
$n(X) + n(Y) = 4$ 이다.
$\therefore\ n(X) = n(Y) = 2$
$X = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생기며
X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로
$\therefore\ 2 \times 6 = 12$

38. 두 함수 $f(x) = 3x - 1,\ g(x) = -x + 2$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1)$ 의 값은?

① -4　② -2　③ $-\frac{4}{3}$　④ 0　⑤ 1

해설

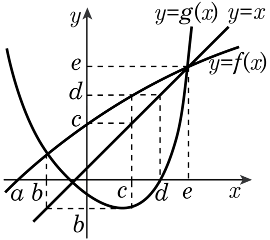
$g^{-1}(x) = -x + 2$

$$g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(3x-1) = -(3x-1) + 2$$
$$= -3x + 3$$

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 이므로

$$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(1)$$
$$= (g^{-1} \circ f)(1)$$
$$= g^{-1}(f(1)) = 0$$

39. 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 함수 $h(x)=(f^{-1}\circ g\circ f)(x)$일 때, $h(c)$의 값은?



① a ② b ③ c

④ d ⑤ e

해설

$$h(c)=(f^{-1}\circ g\circ f)(c)=f^{-1}(g(f(c)))$$
$$=f^{-1}(g(d))=f^{-1}(0)$$

$f^{-1}(0)=k$라 하면 $f(k)=0$

$\therefore k=a$

따라서 $h(c)=a$

40. 0이 아닌 세 실수 x, y, z는 $(x-3)(y-3)(z-3)=0$과 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$을 모두 만족할 때, $x+y+z$의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$(x-3)(y-3)(z-3)=0$을 전개하면

$xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27=0 \cdots ①$

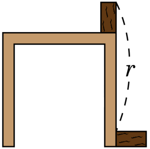
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{3}$

$\therefore 3(xy+yz+zx)=xyz \cdots ②$

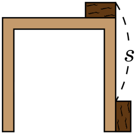
②를 ①에 대입하면 $9(x+y+z)=27$

$\therefore x+y+z=3$

41. 탁자의 높이를 재기 위하여 그림과 같이 크기가 같은 2개의 나무 블럭을 쌓아 보았더니 [그림1]의 높이 r은 32이었고, [그림2]의 높이 s는 28이었다. 이 탁자의 높이는?



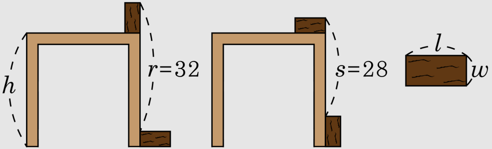
[그림1]



[그림2]

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

해설



책상의 높이를 h, 나무토막의 길이를 l, 폭을 w라 하자.

$l + h - w = 32,\ w + h - l = 28$

두 식을 더하면 $2h = 60$

$\therefore\ h = 30$

42. $x = \sqrt{7-\sqrt{48}}$ 일 때, $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$ 의 값을 구하면?

① 36　　② 98　　③ 448　　④ 724　　⑤ 1024

해설

$$x = \sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}}$$

$$= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

$$x^2 + \frac{1}{x}^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$x^3 + \frac{1}{x}^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 64 - 12 = 52$$

따라서, $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x}^2\right)\left(x^3 + \frac{1}{x}^3\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 14 \times 52 - 4 = 724$$

43. $x = \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{48}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{(4+3) - 2\sqrt{4 \times 3}} \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$x = 2 - \sqrt{3}$ 에서 $(x-2)^2 = (-\sqrt{3})^2$

$x^2 - 4x + 4 = 3$

$\therefore\ x^2 - 4x + 1 = 0$

$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$

$= x^2(x^2 - 4x + 1) + x^3 - 4x^2 + x + 1$

$= x^3 - 4x^2 + x + 1 = x(x^2 - 4x + 1) + 1 = 1$

44. 분수함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $f(0) = g(0) = -1$

Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.

Ⅲ. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

① Ⅰ　　② Ⅰ, Ⅱ　　③ Ⅰ, Ⅲ

④ Ⅱ, Ⅲ　　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

Ⅰ. $f(0) = -1,\ g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = -1$

$\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>

Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로

$$y = f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{f(x)}$$

$= g(x)$ -<참>

Ⅲ. $y = f(x-1) = \dfrac{x-2}{x} = 1 - \dfrac{2}{x}$

따라서, 점근선은 $x = 0, y = 1$

$y = g(x+1) = \dfrac{x+2}{x} = 1 + \dfrac{2}{x}$

따라서 점근선은 $x = 0, y = 1$ -<참>

따라서 옳은 것은 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) 이다.

45. 함수 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ 의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x=a,\ y=b$라 할 때, 함수 $y=\sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 최솟값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{3}{2}$

해설

$$y=\frac{x+1}{x-2}=1+\frac{3}{x-2}$$

∴ 점근선은 $x=2,\ y=1$

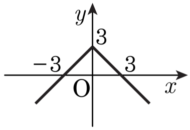
$\therefore\ a=2,\ b=1$

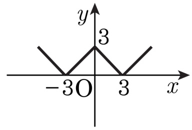
$y=\sqrt{2x+1}$ 의 $\left(x\ge -\dfrac{1}{2}\right)$ 역함수는

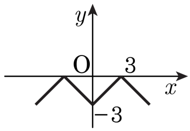
$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\quad (x\ge 0)$$

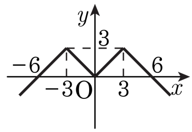
∴ 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$

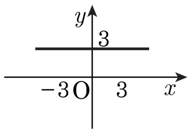
46. $f(x)=3-|x|$, $g(x)=|x|-3$ 일 때, 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프는?

①


②


③


④


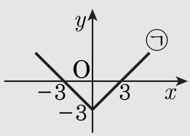
⑤


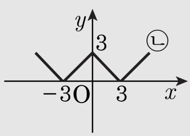
해설

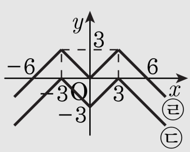
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=3-||x|-3|$ 이므로

$y=|x|-3$ 의 그래프는 ㉠

$y=||x|-3|$ 의 그래프는 ㉡







$y=-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉢

$y=3-||x|-3|$ 의 그래프는 ㉣

47. 정의역이 $\{x \mid x > 0\}$ 인 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = \sqrt{x}$ 가 있다. $(f \circ g^{-1})(a) = -1$ 일 때, $(g \circ f)(4a)$ 의 값은 ?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$g(x) = \sqrt{x} = y$ 의 역함수는 $x = \sqrt{y}$

$\therefore g^{-1}(x) = x^2 \ (x > 0)$

$(f \circ g^{-1})(a) = f(a^2)$

$= a^4 - 2a^2 = -1$

$(a^2 - 1)^2 = 0$

$\therefore a = 1 \leftarrow$ 정의역이 $\{x \mid x > 0\}$

$(g \circ f)(4a) = g(f(4)) = g(8) = 2\sqrt{2}$

해설

$(f \circ g^{-1})(a) = -1$ 에서 $g^{-1}(a) = k$ 라 하면

$f(k) = k^2 - 2k = -1$, $(k-1)^2 = 0$, $k = 1$ 이므로

$g^{-1}(a) = 1 \Leftrightarrow g(1) = a$

$g(1) = \sqrt{1} = a$

$\therefore (g \circ f)(4a) = g(f(4a)) = g(f(4))$

$= g(4^2 - 2 \times 4) = g(8) = \sqrt{8}$

48. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 가 아래와 같이 정의되었다고 하자.

$f(x)=\begin{cases} 2x-a & (x \le 0) \\ 3x+1 & (x \ge 0) \end{cases}$ 함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때, $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4)$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$$f(x)=\begin{cases} 2x-a & (x \le 0) \\ 3x+1 & (x \ge 0) \end{cases}$$

$f(0)=1=-a$

$\therefore a=-1$

$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4)=(f^{-1} \circ f^{-1})(4)$

$(f^{-1} \circ f^{-1})(4)=f^{-1}(f^{-1}(4))$

$f^{-1}(4)=k$ 라 하면 $f(k)=4$

$3k+1=4$ ($\because x \le 0$ 에서 $2x+1 \le 1$)$k=1$ 이고

$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(4)=f^{-1}(1)$

$f^{-1}(1)=m, f(m)=1$ 에서 $2m+1=1$ (또는 $3m+1=1$), $m=0$

$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4)=0$

49. 다음 식의 분모를 0으로 하지 않는 모든 실수 x에 대하여 등식

$$\frac{4}{x^2-1}+\frac{8}{x^2-4}+\frac{12}{x^2-9}+\cdots+\frac{40}{x^2-100}$$
$$=k\left\{\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right\}$$

이 항상 성립할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=22$

해설

(주어진 식)

$$=2\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+2\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$$
$$+\cdots+2\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+10}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+9}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+1}\right)\right\}$$
$$=2\left\{\frac{11}{(x-1)(x+10)}+\frac{11}{(x-2)(x+9)}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{11}{(x-10)(x+1)}\right\}$$

$\therefore k=22$

50. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 8$ 일 때, $x^2 + \sqrt{6}x$ 의 값은? (단, $0 < x < 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 8$ 의 양변에 x^2 을 곱하고 정리하면

$(x^2)^2 - 8x^2 + 1 = 0$

근의 공식으로 풀면

$x^2 = 4 - \sqrt{15}$ $(\because\ 0 < x < 1) \cdots ①$

$x = \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ $(\because\ 0 < x)$

$= \sqrt{\dfrac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdots ②$

①, ②에 따라

$x^2 + \sqrt{6}x$

$= (4 - \sqrt{15}) + \sqrt{6} \times \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$= 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} - 3 = 1$