

1. 다음 중 10 이하의 2 의 배수의 집합을 원소나열법으로 바르게 나타낸 것은?

① {2, 4, 6}

② {2, 4, 6, 8}

③ {2, 4, 6, 8, 10}

④ {2, 4, 6, 8, 10, 12}

⑤ {2, 4, 5, 6, 8, 10}

해설

10 이하의 2 의 배수이므로 {2, 4, 6, 8, 10} 이다.

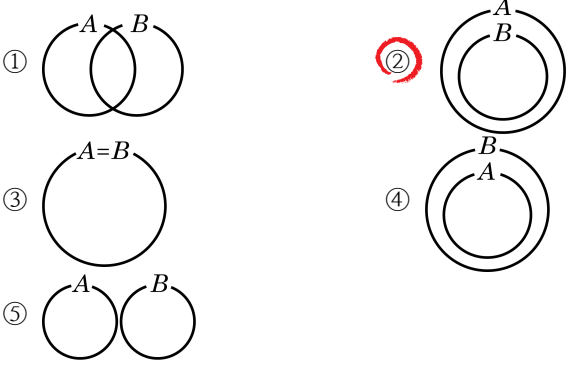
2. 다음 중 공집합인 것은?

- ① $\{x \mid x - 5 = 3, x \text{는 짝수}\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } x \times 0 = 0 \text{인 자연수}\}$
- ③ $\{x \mid x < 1 \text{인 자연수}\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 2 \text{의 약수}\}$
- ⑤ $\{x \mid -1 < x < 1, x \text{는 정수}\}$

해설

③ 1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합

3. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6\text{의 약수}\}$, $B = \{2, 3\}$ 의 포함 관계를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?



해설

$A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{2, 3\}$

$\therefore B \subset A$

4. 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

보기

㉠ $\{0\} = \emptyset$

㉡ $\emptyset \notin \{\emptyset\}$

㉢ $\{a, b\} \subset \{b, a\}$

㉣ $\{1\} \subset \{2, 3, 4\}$

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉢

해설

㉠ $\{0\}$ 은 원소 0을 포함하는 집합이다.

㉡ $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이다.

㉢ 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다.

㉣ 집합 $\{2, 3, 4\}$ 는 집합 $\{1\}$ 을 포함하지 않는다.

5. 다음 중 집합 $A = \{4, 8, 16\}$ 의 부분집합이 아닌 것은?

① $\emptyset$

② A

③ $\{8\}$

④ $\{4, 8, 12, 16\}$

⑤ $\{8, 16\}$

해설

집합 A 의 부분집합을 구하면 $\emptyset, \{4\}, \{8\}, \{16\}, \{4, 8\}, \{4, 16\}, \{8, 16\}, \{4, 8, 16\}$ 이다.

6. 집합 $A = \{m, a, t, h\}$ 에 대하여 부분집합 중 모음을 원소로 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 8개

해설

집합 A 에서 모음은 a 이므로 집합 A 의 부분집합 중 a 를 포함하지 않는 부분집합을 구하면

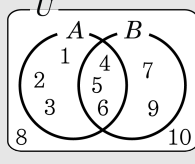
$\emptyset, \{m\}, \{t\}, \{h\}, \{m, t\}, \{m, h\}, \{t, h\}, \{m, t, h\}$ 이고 총 8개이다.

7. 집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 9\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?
(단, $n(A)$ 는 집합 A 의 원소의 개수이다.)
- ① $n(A^c \cap B^c) = 7$
 - ② $A \cap B^c = \{1, 2, 3\}$
 - ③ $B - A = \{7, 9\}$
 - ④ $n(A \cap B) = 3$
 - ⑤ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

해설

벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c) \\ = n((A \cup B)^c) = 2 \end{aligned}$$



8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 20, n(A) = 9, n(B) = 7, n(A^c) = a, n(B^c) = b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 11 ② 13 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

해설

$$a = n(A^c) = n(U) - n(A) = 20 - 9 = 11$$

$$b = n(B^c) = n(U) - n(B) = 20 - 7 = 13$$

$$\therefore a + b = 11 + 13 = 24$$

9. 다음 중 명제 ' $x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x = 1, y = \frac{1}{2}$

② $x = 100, y = \frac{1}{2}$

③ $x = 1, y = 1$

④ $x = 2, y = 4$

⑤ $x = -1, y = -5$

해설

$x+y \geq 2, xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.

$\therefore x = 100, y = \frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

10. 다음에서 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

$$p : a, b \text{는 모두 짝수} \quad q : a + b \text{는 짝수}$$

▶ 답: 조건

▶ 정답 : 충분조건

해설

a, b 는 모두 짝수 $\rightarrow a + b$ 는 짝수 (역은 성립하지 않음) 증명)
 $a = 2m, b = 2n$ (n, m 은 자연수) 이면,
 $a + b = 2m + 2n = 2(m + n)$ 이므로 짝수이다.
 한편, $a = 3, b = 3$ 일 때 $a + b = 6$ 이므로 짝수이지만, a, b 는
 모두 홀수이다.
 $\therefore p$ 는 q 의 충분조건이다.

11. 다음 중 집합인 것은?

- ① 예쁜 어린이들의 모임
- ② 우리 중학교 1학년 1반에서 야구를 잘하는 학생들의 모임
- ③ 4와 10000 사이에 있는 자연수의 모임
- ④ 100에 가까운 수들의 모임
- ⑤ 아주 큰 수들의 모임

해설

집합은 주어진 조건에 대하여 그 대상을 분명히 알 수 있어야 하므로 ③만이 집합이다.

12. 집합 $A = \{x \mid x = 7 \times n - 4, n \text{은 자연수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $3 \notin A$

② $4 \in A$

③ $7 \notin A$

④ $10 \notin A$

⑤ $17 \in A$

해설

$A = \{3, 10, 17, \dots\}$

① $3 \in A$

② $4 \notin A$

④ $10 \in A$

13. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 25\text{미만인 } 5\text{의 배수}\}, B = \{x|x \text{는 } 13 < x < 15\text{인 홀수}\}$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A = \{5, 10, 15, 20\}, B = \emptyset$ 이므로
 $n(A) - n(B) = 4 - 0 = 4$

14. 집합 $A = \{a, b\}$ 에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

- ① $\emptyset$ 는 집합 A 의 부분집합이다.
- ② 원소가 하나뿐인 집합 A 의 부분집합은 1 개이다.
- ③ 원소가 2 개인 집합 A 의 부분집합은 2 개이다.
- ④ $\{a\}$ 는 집합 A 의 진부분집합이다.
- ⑤ $\{a, b, c\} \subset A$ 이다.

해설

집합 A 의 부분집합은 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ 이고, 그 중 진부분집합은 $\{a, b\}$ 를 제외한 $\emptyset, \{a\}, \{b\}$ 이다.

15. 다음 중 부분집합의 개수가 다른 집합은?

① $\{0, 2, 4\}$

② $\{\neg, \sqsubset, 2\}$

③ $\{\emptyset, a, e\}$

④ $\{a, b, c, d\}$

⑤ $\{3, 6, z\}$

해설

① $2^3 = 8$ (개)

② $2^3 = 8$ (개)

③ $2^3 = 8$ (개)

④ $2^4 = 16$ (개)

⑤ $2^3 = 8$ (개)

16. 다음 중 옳은 것은?

- ① $A \subset B$ 이면, $n(A)$ 는 $n(B)$ 보다 작다.
- ② $A \subset B$ 이고, $A \neq B$ 이면, $n(A) = n(B)$ 이다.
- ③ $A = B$ 이면 $n(A)$ 와 $n(B)$ 는 같다.
- ④ $n(A) < n(B)$ 이면, $A \subset B$ 이다.
- ⑤ $A = \{0, \emptyset\}$ 이면 $n(A) = 1$ 이다.

해설

- ① 반례 : $A = \{1\}$, $B = \{1\}$
- ② 반례 : $A = \{1\}$, $B = \{1, 3\}$
- ④ 반례 : $A = \{2\}$, $B = \{1, 3\}$
- ⑤ $A = \{0, \emptyset\}$ 이면 $n(A) = 2$ 이다.

17. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8\text{의 약수}\}$, $B = \{5, 6, 7, 9, 11\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 12\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(C \cap A) \cup B$ 의 원소 중에서 가장 큰 원소를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 가 된다.

먼저 C 와 A 의 교집합을 구해보면 $C \cap A = \{1, 2, 4\}$ 이고 B 와

합집합을 구하면

$(C \cap A) \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$ 이 된다. 가장 큰 원소는 11이다.

18. 전체집합 U 의 두 부분집합 A 와 B 에 대하여 $A \cap B^c = A$, $n(A) = 9$, $n(B) = 14$ 일 때, $n(A \cup B)$ 의 값을 구하시오. (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

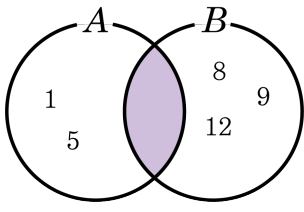
▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$A \cap B^c = A - B = A$ 이므로 A, B 는 서로소
 $n(A \cap B) = 0$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 23$

19. 다음 벤 다이어그램에서 $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 12\}$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

색칠한 부분은 집합 A 와 집합 B 의 공통 부분인 교집합에 해당한다.

$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 12\}$ 이므로 벤 다이어그램에 표시되어 있지 않은 원소를 말한다.

그러므로 색칠한 부분의 원소는 3, 7 이다.

원소의 개수는 2 개이다.

20. 두 집합 $A = \{a + 1, 4, 5\}$, $B = \{a, 3, 5\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{3, 5\}$ 일 때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$3 \in A$ 이므로 $a + 1 = 3$

$\therefore a = 2$

21. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A \cup B) = 26$ 일 때, $n(B) = 15$, $n(A \cap B) = 8$ 이면 $n(A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$26 = n(A) + 15 - 8$$

$$\therefore n(A) = 19$$

22. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 짝수}\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ 일 때, 다음 집합의 원소들의 합을 구하여라.

보기

$$\{x \mid x \in B \text{ 그리고 } x \notin A\}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\{x \mid x \in B \text{ 그리고 } x \notin A\} = B - A$$

$$A = \{2, 4, 6, 8\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \text{ 이므로 } B - A =$$

$$\{1, 3, 5\}$$

$$\therefore 1 + 3 + 5 = 9$$

23. 두 집합 $A = \{1, 2, a\}$, $B = \{5, a + 1, 2 \times a, 11\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{5\}$ 일 때, $(A - B) \cup (B - A)$ 는?

① $\{1, 2, 3\}$

② $\{1, 2, 5, 8\}$

③ $\{1, 2, 7, 8\}$

④ $\{1, 2, 6, 10\}$

⑤ $\{1, 2, 6, 10, 11\}$

해설

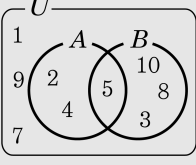
$A \cap B = \{5\}$ 이므로 $a = 5$ 이다. 따라서 $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{5, 6, 10, 11\}$ 이므로

$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2\} \cup \{6, 10, 11\} = \{1, 2, 6, 10, 11\}$ 이다.

24. $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A - B = \{2, 4\}, A \cap B = \{5\}, A^c \cap B^c = \{1, 6, 7, 9\}$ 일 때, 집합 B 는?
- ① $\{3, 5\}$ ② $\{5, 7\}$ ③ $\{3, 5, 8\}$
④ $\{3, 5, 10\}$ ⑤ $\{3, 5, 8, 10\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c = \{1, 6, 7, 9\}$ 이므로



따라서 $B = \{3, 5, 8, 10\}$ 이다.

25. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$(A - B) \subset X \subset A$, 즉 $\{3, 4, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4(\text{개})$ 이다.

26. 실수 x 에 대하여 $x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 ‘ $x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.’가 참이다.
 $x+1=0$ 에서 $x=-1$ 을 $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면
 $(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$
 $\therefore a=1$

27. $a > b > c > 0$ 일 때, $A = \frac{c}{b-a}$, $B = \frac{a}{b-c}$, $C = \frac{b}{a-c}$ 의 대소를
바르게 비교한 것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < C < A$
④ $B < A < C$ ⑤ $C < A < B$

해설

$a > b > c > 0$ 에서
 $b - a < 0$, $b - c > 0$, $a - c > 0$ 이므로
 $A = \frac{c}{b-a} < 0$, $B = \frac{a}{b-c} > 0$
 $C = \frac{b}{a-c} > 0$
$$B - C = \frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} = \frac{a(a-c) - b(b-c)}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{a^2 - ac - b^2 + bc}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{(a-b)(a+b) - c(a-b)}{(b-c)(a-c)}$$
$$= \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)} > 0$$
$$\therefore B > C$$

따라서 $A < 0$, $B > C > 0$ 이므로
 $B > C > A$ 이다.

28. 석훈이네 아파트 한 동에는 전체 350 가구가 살고 있다. 이 중에서 우유를 배달시키는 집은 250 가구, 요구르트를 배달시키는 집은 160 가구, 우유나 요구르트를 배달시키는 집은 310 가구 일 때, 요구르트만 배달시키는 가구 수를 구하여라.

▶ 답 : 가구

▷ 정답 : 60 가구

해설

우유를 배달시키는 집의 집합을 A , 요구르트를 배달시키는 집의 집합을 B 라 하자.

$$n(U) = 350, \quad n(A) = 250, \quad n(B) = 160, \quad n(A \cup B) = 310$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$310 = 250 + 160 - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = 100$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 160 - 100 = 60$$

29. 실수 x, y, z 에 대하여 조건 ' $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ' 의 부정과 서로 같은 것은?

- ① $x = y = z = 0$
- ② $x = 0$ 또는 $y = 0$ 또는 $z = 0$
- ③ $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이고 $z \neq 0$
- ④ $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 또는 $z \neq 0$
- ⑤ $x \neq 0$ 이고 $y = 0$ 이고 $z = 0$

해설

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ 의 부정은 $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ 이다.
 $\therefore x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 또는 $z \neq 0$

30. 다음 보기 중 참인 명제를 모두 고르면?

- ① $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다. (단, x, y 는 실수)
- ② $x + y, xy$ 가 모두 실수이면 x, y 도 모두 실수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.
- ④ $x + y > 1$ 이면 $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이다.
- ⑤ x 가 16 의 약수이면 x 는 8 의 약수이다.

해설

- ① 실수 범위에서 $x = 0, y = 0$ 일 경우에만 성립하므로 참이다.
- ③ 홀수끼리 곱하면 항상 홀수가 나오므로 참이다.

31. 명제 ‘ $-1 < x < 2$ 이면 $a-2 < x < a+2$ 이다.’가 참일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < 1$

② $0 \leq a \leq 1$

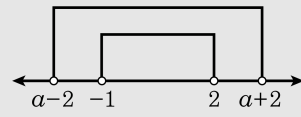
③ $a < 0$

④ $a \geq 1$

⑤ $a < 0$ 또는 $a > 1$

해설

명제 ‘ $-1 < x < 2$ 이면 $a-2 < x < a+2$ 이다.’가 참이 되려면 $\{x \mid -1 < x < 2\} \subset \{x \mid a-2 < x < a+2\}$ 이어야 하므로 다음 그림에서 $a-2 \leq -1, a+2 \geq 2$



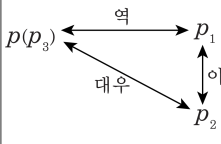
$\therefore 0 \leq a \leq 1$

32. 명제 p 의 역을 p_1 , p_1 의 이를 p_2 , p_2 의 대우를 p_3 이라고 하자. 다음 중 명제 p 와 같은 것은?

- ① p_2 의 역
- ② p_2 의 이
- ③ p_2 의 대우
- ④ p_3 의 역
- ⑤ p_3 의 대우

해설

p, p_1, p_2, p_3 의 관계는 그림을 그려서 생각하면 편리하다. 예를 들어 명제를 $p \rightarrow q$ 를 p 로 두면 p_1 은 $q \rightarrow p$ 이고, p_2 는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이고, p_3 는 $p \rightarrow q$ 이다.



33. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, $p \Rightarrow q$ 로 나타내기로 한다. 명제 p, q, r, s 가 다음의 조건을 만족할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

$\neg p \Rightarrow q$	$\neg r \Rightarrow \neg q$
$s \Rightarrow p$	$\neg s \Rightarrow \neg q$

- ① $s \Rightarrow p$
- ② $p \Rightarrow r$
- ③ $r \Rightarrow s$
- ④ $q \Rightarrow p$
- ⑤ $p \Rightarrow s$

해설

네 명제 p, q, r, s 를 정리하면
 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, s \Rightarrow p, q \Rightarrow s$
즉, $p \Rightarrow q \Rightarrow r, p \Rightarrow q \Rightarrow s$ 이므로
옳지 않은 것은 ③이다.

34. 다음 보기 중 $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것을 모두 고르면? (단, a, b 는 실수)

- $\textcircled{\tiny \neg} \quad a^2 + b^2 = 0$

$\textcircled{\tiny \sqcup} \quad a \neq 0 \text{ 또는 } b \neq 0$
- $\textcircled{\tiny \sqcap} \quad ab \neq 0$

$\textcircled{\tiny \boxplus} \quad a + b \neq 0 \text{ 이고 } ab = 0$
- $\textcircled{\tiny \boxminus} \quad a^2 + b^2 > 0$

- ① $\textcircled{\tiny \neg}$

② $\textcircled{\tiny \sqcup}$

③ $\textcircled{\tiny \sqcap}$
- ④ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

⑤ $\textcircled{\tiny \sqcup}, \textcircled{\tiny \boxminus}$

해설

$a^2 + b^2 \neq 0$ 은 a, b 중 적어도 하나는 0이 아니므로 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다.
① $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.
② $ab \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이다.
③ $a + b \neq 0$ 이고 $ab = 0$ 이면 a, b 둘 중에 하나는 0이 아니다.
④ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이다. 따라서 $a^2 + b^2 \neq 0$ 과 동치인 것은 ②, ④이다.

35. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P - Q = \emptyset$ 이면 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ③ p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ④ p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.
- ⑤ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$P - Q = \emptyset$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

36. 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① $a > 0, b > 0$ 이면 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
- ② 모든 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| > a + b$
- ③ 모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 > ab$
- ④ 모든 실수 a, b 대하여 $|a - b| \leq |a| - |b|$
- ⑤ $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \sqrt{b}$

해설

- ① : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면
 $a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$
 $\Rightarrow 2\sqrt{ab} > 0$ (참)
- ② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.
- ③ : (반례) $a = 0, b = 0$

37. $a \geq 0, b \geq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(a-b)^2}{2}$ 이므로
부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 이 성립함을 알 수 있다.
이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

- ① $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$

② $\geq, a - b, a = b = 0$
- ③ $>, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$

④ $>, a - b, a = b$
- ⑤ $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a \geq b$

해설

$\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$
 $= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$
(가), (나)의 결과에서 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ 이므로
 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
(다) $\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$ 에서
등호가 성립할 때는 $\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} = 0$ 일 때이므로
등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

38. $x > 0, y > 0, xy = \frac{9}{2}$ 일 때 $5x + 10y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$5x + 10y \geq 2\sqrt{50xy}$$

$$\begin{aligned}\text{그런데 } 2\sqrt{50xy} &= 2\sqrt{50 \times \frac{9}{2}} \\ &= 2\sqrt{25 \times 9} = 2 \times 15 = 30\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 30

39. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$$

40. 두 실수 x, y 의 제곱의 합이 10일 때, $x + 3y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로 $100 \geq (x + 3y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$
 $\therefore M = 10, m = -10$
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$

41. 집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ 이다. 다음 U 의 부분집합 A 중 아래 조건 ㉠과 ㉡를 만족시키며 원소의 개수가 가장 적은 것은?

- ㉠ $3 \in A$

㉡ $m, n \in A$ 이고 $m + n \in U$ 이면, $m + n \in A$ 이다.

- ① $A = \{1, 2, \dots, 100\}$

② $A = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$

③ $A = \{3, 4, 5, \dots, 100\}$

④ $A = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$

⑤ $A = \{3, 9, 15, \dots, 99\}$

해설

$3 \in A, 3 + 3 \in A, 3 + 3 + 3 \in A, \dots$ 이므로 U 의 원소 중 3의 배수가 된다.
따라서 원소의 개수가 가장 적은 A 는 ④

42. 집합 $A = \{0, 1, \{0, 1\}\}$ 에 대하여 집합 $P(A)$ 를 $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$ 로 정의하자. 이 때, $P_1(A) = P(A)$, $P_2(A) = P(P_1(A))$ 라 하면, $P_2(A)$ 의 원소의 개수는?

① 32개

② 64개

③ 128개

④ 256개

⑤ 512개

해설

$$n(A) = 3, n(P_1(A)) = 2^3 = 8$$

$$\therefore n(P_2(A)) = 2^8 = 256$$

43. 두 집합 $A = \{2, 3, a, 7, b, 13, c\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } d \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, 다음 중 $a + b + c + d$ 의 값으로 옳은 것을 모두 고르면?

- ① 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ⑤ 52

해설

집합 A 의 원소의 개수가 7개이므로
집합 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$
i) $d = 17$, ii) $d = 18$ 인 두 가지 경우가 있으므로
 $5 + 11 + 17 + 17 = 50$, $5 + 11 + 17 + 18 = 51$ 이다.

44. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 10\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $B \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 8개

해설

$$A \cap X = X \text{ 이므로 } X \subset A, B \cup X = X \text{ 이므로 } B \subset X \quad \therefore B \subset X \subset A$$

즉, $\{4, 10\} \subset X \subset \{2, 4, 6, 8, 10\}$

따라서 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 4, 10을 반드시 포함하는 집합이므로 개수는

$$2^{5-2} = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (개)이다.}$$

45. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A - B = \emptyset, B - A = \emptyset$ 이고, 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합이 10 일 때, 집합 A 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A - B = \emptyset, B - A = \emptyset$,
 $\rightarrow A = B$,
 $\rightarrow A \cap B = A = B$,
 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합이 10 이므로,
집합 A 의 모든 원소의 합은 10

46. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \emptyset$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 와 같은 값을 모두 고르면? (정답 3 개)

- ① $n((A \cup B) - n(A \cap B))$

② $n(\emptyset)$
- ③ $n(B) - n(A)$

④ $n(A)$
- ⑤ $n(B)$

해설

$(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset$ 이므로 $A - B = \emptyset$, $B - A = \emptyset$ 이다.

따라서 $A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A = B$ 이다.

따라서 $n(A) - n(B) = 0$ 이고,

① $n((A \cup B) - n(A \cap B)) = 0$

② $n(\emptyset) = 0$

③ $n(B) - n(A) = 0$ 이다.

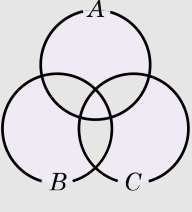
47. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 연산 $\odot$ 을 $X \odot Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 로 정의하자. 1에서 30까지의 자연수 중 2의 배수, 3의 배수, 5의 배수의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $(A \odot B) \odot C$ 의 원소의 개수는?

- ① 11개 ② 12개 ③ 13개 ④ 14개 ⑤ 15개

해설

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) &= (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c \\ &= (X \cup Y) - (X \cap Y) \\ &= (X - Y) \cup (Y - X) \end{aligned}$$

이 정의로부터 $(A \odot B) \odot C$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



이때, $A \cap B$ 는 6의 배수의 집합,
 $B \cap C$ 는 15의 배수의 집합,
 $C \cap A$ 는 10의 배수의 집합,
 $A \cap B \cap C$ 는 30의 배수의 집합이므로
 $n(A) = 15, n(B) = 10, n(C) = 6,$
 $n(A \cap B) = 5, n(B \cap C) = 2, n(C \cap A) = 3,$
 $n(A \cap B \cap C) = 1$

$$\begin{aligned} \therefore n \{ (A \odot B) \odot C \} &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - 2 \{ n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) \} \\ &\quad + 4 \cdot n(A \cap B \cap C) \\ &= 15 + 10 + 6 - 2(5 + 2 + 3) + 4 \\ &= 15 \end{aligned}$$

48. 실수 x 에 대하여 두 조건 $p : a \leq x \leq 1$, $q : x \geq -1$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 상수 a 의 범위는?

① $a > 1$

② $a \leq 1$

③ $-1 \leq a \leq 1$

④ $a \geq -1$

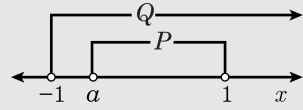
⑤ $a \leq -1$

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

(i) $a > 1$ 일 때, $P = \emptyset$ 이므로 $P \subset Q \therefore a > 1$

(ii) $a \leq 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$\therefore -1 \leq a \leq 1$

(i), (ii)에서 $a \geq -1$

49. 다음은 명제 ‘ xy 가 3의 배수이면 x, y 중 적어도 하나는 3의 배수이다.(단, x, y 는 정수이다.)’가 참임을 대우를 이용하여 증명한 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 틀린 것은?

주어진 명제의 대우는 ‘ x, y 가 모두 (가)가 아니면 xy 는 (가)가 아니다.’이다.이것이 참임을 보이자.
 x, y 가 모두 (나)가 아니면 x, y 를 각각 $x = 3m \pm 1, y = 3n \pm 1$ (단, m, n 은 정수)로 나타낼 수 있다.
이때, (다) $= (3m \pm 1)(3n \pm 1)$
 $= 9mn \pm 3m \pm 3n + 1$
 $= 3(3mn \pm m \pm n) + 1$
또는 (다) $= (3m \pm 1)(3n \mp 1)$
 $= 9mn \mp 3m \pm 3n - 1$
 $= 3(3mn \mp m \pm n) - 1$
이다. 그리고 m, n 이 정수이므로
 $3mn \pm m \pm n, 3mn \mp m \pm n$ 도 정수이다.
따라서, (다)는 3의 배수가 아니다. 즉, 주어진 명제의 대우는 (라)이다.
그러므로 주어진 명제는 (마)이다.

- ① (가) 3의 배수 ② (나) 3의 배수 ③ (다) xy
- ④ (라) 참 ⑤ (마) 거짓

해설

대우가 참이므로 명제 역시 참이다.

50. a, b, c, d, x, y, z 가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

- ㉠ $a^2 + b^2 \geq ab$
- ㉡ $a^2 + b^2 + 1 < 2(a + b - 1)$
- ㉢ $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq (ax + by + cz)^2$
- ㉤ $|a + b| \leq |a| + |b|$
- ㉥ $|a| - |b| \geq |a - b|$
- ㉦ $|a + b| \geq |a| - |b|$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉦

해설

부등식의 증명 : 좌변에서 우변을 뺀 값의 부호 결정한다.

- ㉠ $a^2 + b^2 - ab = a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2$
 $= (a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$
 $\therefore a^2 + b^2 \geq ab$: 맞음
- ㉡ $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$
 $= a^2 - 2a + b^2 - 2b + 3$
 $= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 1 > 0$
 $\therefore a^2 + b^2 + 1 > 2(a + b - 1)$: 틀림
- ㉢ $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$
 $= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2$
 $+ b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2cazx)$
 $= (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0$
 $\therefore (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$: 틀림
- ㉤ $|a + b|$ 의 차를 구해본다. (우변에서 좌변을 뺀 값)
 $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$
 $= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$
 $= 2|ab| - 2ab \geq 0 (\because |ab| \geq ab)$
 $\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$: 맞음
- ㉥ $|a| - |b|$ 의 차 비교
 $(|a| - |b|)^2 - |a - b|^2$
 $= a^2 - 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$
 $= -2|ab| + 2ab \leq 0 (\because |ab| \geq ab)$
 $\therefore |a| - |b| \leq |a - b|$: 틀림
- ㉦ $|a + b|^2 - (|a| - |b|)^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2|ab| + b^2)$
 $= 2ab + 2|ab| \geq 0$
 $\therefore |a + b| \geq |a| - |b|$: 맞음