1. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A \triangle B = 2A + B$, $\mathrm{A} \blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.
$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A \blacktriangledown (B \triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$
② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A \blacktriangledown (B \triangle A) &= A \blacktriangledown (2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

2. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3 ② 3 ③ -6 ④ 6 ⑤ 12

해설
직접 나누어 본다.
$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설
$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.
$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$, $x^3 - 1 = 0$
$\therefore x^3 = 1$
준 식의 좌변에 $x^3 = 1$, $x^2 = -x - 1$을 대입하면
$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0$, $a - 3 = 0$
$\therefore\ a = 3$

3. $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

① 0　② 2　③ -2　④ 4　⑤ -4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은
(3차항)×(상수항), (2차항) ×(1차항)
2쌍씩이다.
$4\times1\times2+(-3)\times2\times2 = 8+(-12) = -4$

4. $(m^2-4)x-1=m(3x+1)$를 만족하는 x가 없도록 하는 상수 m의 값은?

① -1 ② -2 ③ -4 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(m^2-3m-4)x-1-m=0$의 해가 없으므로
$m^2-3m-4=0$ 이고 $-m-1\neq 0$
$\therefore m=4$

5. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때의 나머지는 3이고, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 1이다. 이 다항식을 $(x-1)(x-2)$로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $-2x+1$ ② $-2x-1$ ③ $-2x+3$
④ $-2x+5$ ⑤ $-2x+7$

해설

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ 라 하면,
$f(1)=3,\ f(2)=1$ 이므로
$f(1)=a+b=3,\ f(2)=2a+b=1$ 연립하면
$a=-2,\ b=5$
$\therefore$ 나머지는 $-2x+5$ 이다.

6. 다항식 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 1이고, 또 $Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이다. $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x)=(x-3)Q(x)+1$

$Q(2)=-2$

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는 $f(2)$이다.

$f(2)=(2-3)Q(2)+1$

$\quad=-1\times(-2)+1=3$

7. x의 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눌 때, 나머지가 2이다. 이 때, $(x^2-x+3)f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구하면?

① 10 ② 6 ③ 0 ④ 30 ⑤ 12

해설

$f(-1)=2$

$(x^2-x+3)f(x)=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$ 대입

$\therefore R=5f(-1)=5\times 2=10$

8. 사차식 $x^4-10x^2y^2+9y^4$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-3y$ ② $x-2y$ ③ $x-y$
④ $x+y$ ⑤ $x+3y$

해설

$x^4-10x^2y^2+9y^4=\left(x^2-9y^2\right)\left(x^2-y^2\right)$
$=(x-3y)(x+3y)(x-y)(x+y)$

9. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$을 인수분해 했을 때 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$ ② $x + 1$ ③ $x + 2$

④ $(x - 1)^2$ ⑤ $(x + 1)^2$

해설

조립제법을 이용한다.

1	1	1	-3	-1	2
		1	2	-1	-2
1	1	2	-1	-2	0
		1	3	2	
-1	1	3	2	0	
		-1	-2		
-2	1	2	0		
		-2			
	1	0			

$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x - 1)^2(x + 1)(x + 2)$

10. 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은?
(단, $z \neq \pm i$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $z \cdot \bar{z} = 1$　　② $z + \bar{z} = 0$

③ $z + \bar{z} = 1$　　④ $z + \bar{z} = -1$

⑤ $(z+1)(\bar{z}+1) = 1$

해설

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z}) - z\bar{z}(z-\bar{z})}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z})(1-z\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

(분모)$\neq 0$ 이므로

(분자)$= (z-\bar{z})(1-z\bar{z}) = 0$

z 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$\therefore z\bar{z} = 1$

11. $f(x) = x^{61} + x^{47} + 1$ 이라고 할 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = f(-i) = (-i)^{61} + (-i)^{47} + 1 = 1$

$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = i^{61} + i^{47} + 1 = 1$

12. α, β 의 켤레복소수를 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라고 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\overline{\alpha-\beta i}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}i$

㉡ $\overline{\alpha+\beta-1}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}+1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha}^2+\alpha^2\overline{\alpha}$ 는 실수이다.

㉣ $\alpha\overline{\beta}=1$ 일 때, $\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}+\dfrac{\overline{\beta}}{\beta}$ 는 실수이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉢　　③ ㉡, ㉣

④ ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$, $\overline{\alpha}=a-bi$, $\overline{\beta}=c-di$ 라 하면

㉠ $\overline{\alpha-\beta i}=\overline{a+bi-(c+di)i}$
$=\overline{a+bi-ci-di^2}$
$=a+d-(b-c)i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}i=(a-bi)-(c-di)i$
$=a-bi-ci+di^2$
$=a-d-(b+c)i$이므로 ㉠은 거짓

㉡ $\overline{\alpha+\beta-1}=\overline{a+bi+c+di-1}$
$=\overline{(a+c-1)+(b+d)i}$
$=(a+c-1)-(b+d)i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}+1=a-bi+c-di+1$
$=(a+c+1)-(b+d)i$이므로
㉡은 거짓

13. $z = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$ 일 때, $z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$z = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$$

$$z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2 = \frac{2}{1-2i+i^2} = \frac{2}{-2i} = -\frac{1}{i}$$

$$= -\frac{i}{i^2} = i$$

$$\therefore\ z^4 + z^2 - \sqrt{2}z + 1 = i^2 + i - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} + 1$$

$$= -1 + i - (1+i) + 1 = -1$$

14. 이차다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$라 놓으면
$f(2x)=a(2x-\alpha)(2x-\beta)=0$
$a\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$, $\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$
$\alpha+\beta=12$ 이므로
이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ 의 합은
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{12}{2}=6$

15. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3-2i,\ 3+2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2-i,\ 2+i$ 라는 근을 구했을 때, $\left|\frac{bc}{a^2}\right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.
두 근의 곱 $=\frac{c}{a}=(3-2i)(3+2i)=9+4=13$
성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x의 계수는 참이다.
두 근의 합$=-\frac{b}{a}=2-i+2+i=4$
$\therefore \left|\frac{bc}{a^2}\right|=\left|\frac{b}{a}\times\frac{c}{a}\right|=|-4\times 13|=|-52|=52$

16. x에 관한 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-4k-5=0$이 서로 다른 두 음의 실근을 가질 때, 상수 k의 값의 범위는 $a<k<b$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① $-\frac{3}{4}$　② $-\frac{5}{4}$　③ $-\frac{7}{4}$　④ $-\frac{9}{4}$　⑤ $-\frac{11}{4}$

해설

$x^2-2kx+k^2-4k-5=0$이 서로 다른 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2-4k-5)=k^2-k^2+4k+5>0$

$\therefore k>-\frac{5}{4}\cdots$ ㉠

두 근이 음수이므로

두 근의 합 $2k<0$　　$\therefore k<0\cdots$ ㉡

두 근의 곱은

$k^2-4k-5>0$에서 $(k+1)(k-5)>0$

$\therefore k<-1,\ k>5\cdots$ ㉢

$\therefore$ ㉠, ㉡, ㉢에 의해

$-\frac{5}{4}<k<-1$

$\therefore a=-\frac{5}{4},\ b=-1$

$a+b=-\frac{5}{4}-1=-\frac{9}{4}$

17. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2k,\ \alpha\beta = 2k + 3$

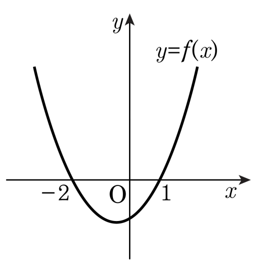
$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로

$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3),\ 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$k^2 - 2k - 8 = 0$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

18. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
$y=f(x)$ 이 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y=f(x+a)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$
$\therefore a=-3$

19. x의 범위가 $-2 \le x \le 3$일 때, 함수 $f(x) = x^2 + 2x + C$ 의 최소값이 4 가 되도록 상수 C 의 값을 정할 때, 함수 $f(x)$ 의 최대값은?

① 8　　② 12　　③ 16　　④ 20　　⑤ 24

해설

$f(x) = (x+1)^2 + C - 1$
주어진 범위에서 $x = -1$ 일 때
최소값을 가지므로
$f(-1) = C - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 5$
$\Rightarrow \quad f(x) = (x+1)^2 + 4$
주어진 범위에서 $x = 3$ 일 때 최대값을 가진다.
$\Rightarrow \quad f(3) = 4^2 + 4 = 20$

20. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x-2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,
최댓값 9를 갖는다.

21. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값들의 합을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$(x-1)(x^2-ax+2a)=0$에서

ⅰ) 1이 중근일 경우

$x^2-ax+2a=0$에 $x=1$을 대입하면 성립해야 하므로

$1-a+2a=0$, $a=-1$

ⅱ) 1이 중근이 아닌 경우

$x^2-ax+2a=0$이 중근을 가지므로 판별식 $D=0$에서

$D=a^2-8a=0$, $a(a-8)=0$, $a=0,8$

$\therefore\ 0+8-1=7$

22. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.
$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$ 이다.
$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

23. $\alpha,\ \beta$를 방정식 $x^3 = 1$의 두 허근이라 할 때, $\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{10} + (\beta^2+1)^{10}$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3 - 1 = 0,\ (x-1)(x^2+x+1) = 0$의
두 허근이 α,β라면,
$x^2+x+1 = 0$의 두 허근이 α,β이다.
$\alpha+\beta = -1,\ \alpha\beta = 1$
$\alpha^2+\alpha+1 = 0,\ \alpha+1+\frac{1}{\alpha} = 0,$
$\frac{1}{\alpha}+1 = -\alpha$
$\beta^2+\beta+1 = 0,$
$\beta^2+1 = -\beta$
$\alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$
$\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{10} + \left(\beta^2+1\right)^{10}$
$= (-\alpha)^{10} + (-\beta)^{10}$
$= \alpha^{10} + \beta^{10}$
$= (\alpha^3)^3\alpha + (\beta^3)^3\beta$
$= \alpha+\beta = -1$

24. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 $20\,\%$ 증가하였고, B제품은 $25\,\%$ 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 40 개

해설

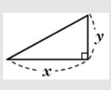
작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

25. 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 21 cm 이고, 빗변의 길이가 15 cm 일 때, 직각을 낀 두 변의 길이 중 긴 변의 길이를 구하시오.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 x, y 라 하면

$\begin{cases} x + y = 21 \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 15^2 \cdots ② \end{cases}$ 이다.

①에서 $y = 21 - x$ 를 ②에 대입하면

$x^2 + (21 - x)^2 = 15^2$

$x^2 + 21^2 - 42x + x^2 = 15^2$

$2x^2 - 42x + 21^2 - 15^2 = 0$

$2x^2 - 42x + (21 + 15)(21 - 15) = 0$

$x^2 - 21x + 3 \times 36 = 0$

$(x - 12)(x - 9) = 0$,

$x = 12$ 또는 $x = 9$

$x = 12$ 일 때 $y = 9$

$x = 9$ 일 때 $y = 12$

따라서 긴 변의 길이는 12 cm 이다.