1. 다음 중 항상 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 $n,\ m$에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ $a,\ b$가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 $a,\ b$에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p 의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 $a,\ b$가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

2. $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $q \rightarrow p$　② $p \rightarrow q$　③ $\sim p \rightarrow \sim q$
④ $\sim p \rightarrow q$　⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

'명제가 참이면 그의 대우는 항상 참이다.'
$\sim p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow$ 역 : $\sim q \rightarrow \sim p$(참)
$\sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow$ 대우 $p \rightarrow q$(참)

3. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 『n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제의 (가)를 구해보면 『n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n =$ (나) (단, k 는 자연수) 따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

① 대우, $2k$　② 대우, $4k$　③ 대우, $2k+1$
④ 역, $2k+1$　⑤ 역, $4k^2$

해설

'n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.' 의 대우는 'n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'
∴ (가)–대우 n 이 짝수이면 $n = 2k$
∴ (나)– $2k$

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$ ② $A \cap B = \varnothing$ ③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

5. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식$|a|+|b| \geq |a+b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
$=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-(a+b)^2$
$=\ a^2+b^2+2|ab|-a^2-2ab-b^2$
$=\ 2(|ab|-ab)\ 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$
$\therefore |a|+|b| \geq |a+b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2=a^2$

④ $a-b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
$=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-(a+b)^2$ (③이 쓰임)
$=a^2+b^2+2|ab|-a^2-2ab-b^2$
$=2(|ab|-ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a|+|b| \geq |a+b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

6. $x > 2$일 때 $4x + \dfrac{1}{x-2}$의 최솟값은?

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

해설

$x - 2 = t$ 로 놓으면 $t > 0$이고 $x = t + 2$
따라서 주어진 식을 t로 나타낸 다음 산술평균과 기하평가의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} 4x + \frac{1}{x-2} &= 4(t+2) + \frac{1}{t} \\ &= 4t + \frac{1}{t} + 8 \\ &\geq 2\sqrt{4t + \frac{1}{t}} + 8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $4t = \dfrac{1}{t}$ 일 때 성립)

7. 실수 $a,\ b,\ x,\ y$에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -1　② 0　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

8. 명제 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2+4 \geq k$ 이다.' 는 참이고, '어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 1$ 이다.' 는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-4 \leq k \leq -1$　② $1 \leq k \leq 4$　③ $-1 \leq k < 1$
④ $1 < k \leq 4$　⑤ $-4 \leq k \leq 1$

해설
모든 실수 x 에 대하여 $x^2+4 \geq k$ 가 참이므로 $k \leq 4$
어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+k \leq 1$ 이 거짓이므로 $k > 1$
$\therefore\ 1 < k \leq 4$

9. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \to q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

해설

$p \to q$는 $\sim q \to \sim p$와 동치임을 이용
$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0$,
$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \to\ a \leq -1$
2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \to\ a \geq -5$
$\therefore\ -5 \leq a \leq -1$
따라서, $-5 + (-1) = -6$

10. 전체집합 U 의 세 부분집합 P, Q, R 는 각각 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합이다. 두 명제 $\sim p \to q$, $r \to \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$　　② $Q \subset R$　　③ $P^c \subset R^c$

④ $P \subset Q^c$　　⑤ $R^c \subset P$

해설

$\sim p \to q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$

$r \to \sim q$ 가 참이므로 $R \subset Q^c$

또, $\sim p \to q$ 와 $r \to \sim q$ 의 대우인 $q \to \sim r$ 가 참이므로 $\sim p \to \sim r$ 가 참이다.

$\therefore$ $P^c \subset R^c$

따라서, 항상 옳은 것은 ③이다.

11. 다음은 실수 a, b 에 대하여 $|a+b| \le |a|+|b|$ 이성립함을 증명한 것이다.

(증명) $|a+b| \ge 0, |a|+|b| \ge 0$ 이므로
$|a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$ 을 증명하면 된다.
$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab)$
그런데, (가) 이므로 $2(|ab| - ab) \ge 0$
$\therefore\ |a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$
따라서 $|a+b| \le |a|+|b|$
여기서, 등호가 성립하는 경우는 (나) 일 때,
즉, $ab \ge 0$ 일 때이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $|ab| \ge ab, a = b$
② $|ab| \ge ab, |ab| = ab$
③ $|ab| \le ab, |ab| = ab$
④ $|ab| = ab, a = 0$
⑤ $|ab| = ab, a = b$

해설

(가) : $|ab| \ge ab$($\because$ $|ab|$는 항상 양수)
(나) : $2(|ab| - ab) = 0$일 때, 즉 $|ab| = ab$

12. 다음은 a, b, c가 실수일 때 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ 를 증명한 것이다.[가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
([가]) $\left(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$ ([나])0
$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=0$ 일
$a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$
때 성립)

① $\frac{1}{2}$, $>$ ② $\frac{1}{2}$, $\geq$ ③ 2, $>$ ④ 2, $\geq$ ⑤ 2, $=$

해설

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
두식의차를변형하면
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$
$\because a, b, c$ 가 실수이므로 $(a-b)^2 \geq 0$,
$(b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$
$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=c$ 일 때
$a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$
성립)

13. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x+y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x-1| \leq |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=-1$ 일 때,
$xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=3$ 일 때,
$x+y=-2+3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x=2,\ y=-2$ 일 때,
$2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \leq |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2-2x+1 \leq x^2-6x+9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2+b^2 > 0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2+b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$'은 거짓이다.

14. 전체집합 U 의 임의의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$ 에 대하여 <보기> 의 ㈎, ㈏에 들어갈 것을 순서대로 나열한 것은?

보기

(1) $A \subset B$는 $A - B = \varnothing$이 되기 위한 $\boxed{\text{㈎}}$ 조건이다.
(2) $B = C$는 $A \cup B = A \cup C$이 되기 위한 $\boxed{\text{㈏}}$ 조건이다.

① 필요, 필요충분
② 필요, 필요
③ 필요충분, 필요충분
④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요충분

해설

(1)은 명제, 역 모두 성립하는 필요충분조건이고,
(2)는 역일 경우에 성립하지 않는 경우가 있으므로 충분조건이다.
(반례) 역의 경우에서 $A \supset B,\ A \supset C,\ B \subset C$이면 성립하지 않는다.

15. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \to q$　　② $q \to \sim p$　　③ $s \to \sim q$

④ $\sim s \to \sim p$　　⑤ $\sim r \to p$

해설

$p \to q$　$s \to \sim r$　$q \to r$

$q \to r$의 대우 : $\sim r \to \sim q$

$\therefore s \to \sim r, \sim r \to \sim q$ 이므로 $s \to \sim q$

16. x, y는 양수이고 $\frac{2}{x}+\frac{8}{y}=3$일 때, $x+y$의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x+y=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot(x+y)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{8}{y}\right)(x+y)$

$=\frac{1}{3}\left(2+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}+8\right)$

$=\frac{1}{3}\left(10+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}\right)\geq\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{8x}{y}}\right)$

$=\frac{1}{3}(10+8)=6$