

1. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① 자연수 n 에 대하여, n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.
- ② 자연수 n, m 에 대하여 $n^2 + m^2$ 이 홀수이면, nm 은 짝수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면, n 은 3의 배수이다.
- ④ a, b 가 실수일 때, $a + b\sqrt{2} = 0$ 이면, $a = 0$ 이다.
- ⑤ 두 실수 a, b 에 대하여, $a + b > 2$ 이면, $a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

①, ③ : n^2 이 p 의 배수이면, n 은 p 의 배수이다. (참)

② : 대우는 ‘ nm 은 홀수이면 $n^2 + m^2$ 이 짝수이다.’ nm 은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 $n^2 + m^2$ 은 짝수이다.

∴ 주어진 명제는 참

④ 반례 : $a = 2\sqrt{2}, b = -1$

※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b 가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.

⑤ 대우 : $a \leq 1$ 그리고 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ (참)

2. $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참일 때, 다음 중 반드시 참인 명제는?

① $q \rightarrow p$

② $p \rightarrow q$

③ $\sim p \rightarrow \sim q$

④ $\sim p \rightarrow q$

⑤ $p \rightarrow \sim q$

해설

‘명제가 참이면 그의 대우는 항상 참이다.’

$$\sim p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow \text{역} : \sim q \rightarrow \sim p (\text{참})$$

$$\sim q \rightarrow \sim p \Leftrightarrow \text{대우} : p \rightarrow q (\text{참})$$

3. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 『 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제의 (가)를 구해보면 『 n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n = (\text{나})$ (단, k 는 자연수) 따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

- ① 대우, $2k$ ② 대우, $4k$ ③ 대우, $2k + 1$
④ 역, $2k + 1$ ⑤ 역, $4k^2$

해설

『 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』의 대우는 ‘ n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.’

∴ (가)-대우 n 이 짝수이면 $n = 2k$

∴ (나)- $2k$

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$

② $A \cap B = \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

5. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned}
 & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\
 &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\
 &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\
 &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\
 &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\
 &\therefore |a| + |b| \geq |a + b|
 \end{aligned}$$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$$\begin{aligned}
 & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\
 &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \text{ (③이 쓰임)} \\
 &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\
 &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \text{ (①이 쓰임)} \\
 &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \text{ (④가 쓰임)} \\
 &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \text{ (⑤가 쓰임)} \\
 &\text{따라서, ②는 쓰이지 않았다.}
 \end{aligned}$$

6. $x > 2$ 일 때 $4x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$x - 2 = t$ 로 놓으면 $t > 0$ 이고 $x = t + 2$

따라서 주어진 식을 t 로 나타낸 다음 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} 4x + \frac{1}{x-2} &= 4(t+2) + \frac{1}{t} \\ &= 4t + \frac{1}{t} + 8 \\ &\geq 2\sqrt{4t + \frac{1}{t}} + 8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $4t = \frac{1}{t}$ 일 때 성립)

7. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 5, x^2 + y^2 = 3$ 일 때 다음 중 $ax + by$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -1

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

a, b, x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$5 \times 3 \geq (ax + by)^2$$

$$\therefore -\sqrt{15} \leq ax + by \leq \sqrt{15}$$

따라서 4는 $ax + by$ 의 범위에 속하지 않는다.

8. 명제 ‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4 \geq k$ 이다.’는 참이고, ‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 1$ 이다.’는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-4 \leq k \leq -1$

② $1 \leq k \leq 4$

③ $-1 \leq k < 1$

④ $1 < k \leq 4$

⑤ $-4 \leq k \leq 1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4 \geq k$ 가 참이므로 $k \leq 4$

어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 1$ 이 거짓이므로 $k > 1$

$\therefore 1 < k \leq 4$

9. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 a 의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7

② -6

③ -5

④ -4

⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$ 는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0,$$

$x = -3, 1$ 이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$ 이다.

1) $x = -3 : 9 + 3a - 6 \leq 0 \rightarrow a \leq -1$

2) $x = 1 : 1 - a - 6 \leq 0 \rightarrow a \geq -5$

$$\therefore -5 \leq a \leq -1$$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

10. 전체집합 U 의 세 부분집합 P, Q, R 는 각각 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합이다. 두 명제 $\sim p \rightarrow q, r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$

② $Q \subset R$

③ $P^c \subset R^c$

④ $P \subset Q^c$

⑤ $R^c \subset P$

해설

$\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$

$r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 $R \subset Q^c$

또, $\sim p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 의 대우인 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 $\sim p \rightarrow \sim r$ 가 참이다.

$\therefore P^c \subset R^c$

따라서, 항상 옳은 것은 ③이다.

11. 다음은 실수 a, b 에 대하여 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(증명) $|a+b| \geq 0, |a|+|b| \geq 0$ 이므로
 $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ 을 증명하면 된다.

$$\begin{aligned} & (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \end{aligned}$$

그런데, (가) 이므로 $2(|ab| - ab) \geq 0$

$$\therefore |a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$$

따라서 $|a+b| \leq |a|+|b|$

여기서, 등호가 성립하는 경우는 (나) 일 때,
 즉, $ab \geq 0$ 일 때이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $|ab| \geq ab, a = b$

② $|ab| \geq ab, |ab| = ab$

③ $|ab| \leq ab, |ab| = ab$

④ $|ab| = ab, a = 0$

⑤ $|ab| = ab, a = b$

해설

(가) : $|ab| \geq ab$ ($\because |ab|$ 는 항상 양수)

(나) : $2(|ab| - ab) = 0$ 일 때, 즉 $|ab| = ab$

12. 다음은 a, b, c 가 실수일 때 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 를 증명한 것이다. [가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)$$

$$([가]) (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} ([나]) 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0 \quad (\text{단, 등호는 } a = b = 0 \text{ 일}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ca)$$

때 성립)

- ① $\frac{1}{2}, >$ ② $\frac{1}{2}, \geq$ ③ $2, >$ ④ $2, \geq$ ⑤ $2, =$

해설

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)$$

두식의차를변형하면

$$\frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0$$

$\therefore a, b, c$ 가 실수이므로 $(a-b)^2 \geq 0,$

$$(b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0 \quad (\text{단, 등호는 } a = b = c \text{ 일 때}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ca)$$

성립)

13. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x + y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x - 1| \leq |x - 3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x = -2, y = -1$ 일 때,
 $xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.

② 거짓 : (반례) $x = -2, y = 3$ 일 때,
 $x + y = -2 + 3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.

③ 거짓 : (반례) $x = 2, y = -2$ 일 때,
 $2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.

④ $|x - 1| \leq |x - 3|$ 의 양변을 제곱하면
 $x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그
역이 모두 참이다.

⑤ 명제 ' $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ ' 은 참이지만, 그의
역 ' $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$ ' 은 거짓이다.

14. 전체집합 U 의 임의의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 <보기>의 (가), (나)에 들어갈 것을 순서대로 나열한 것은?

보기

- (1) $A \subset B$ 는 $A - B = \emptyset$ 이 되기 위한 (가) 조건이다.
(2) $B = C$ 는 $A \cup B = A \cup C$ 이 되기 위한 (나) 조건이다.

- ① 필요, 필요충분 ② 필요, 필요
③ 필요충분, 필요충분 ④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요충분

해설

- (1)은 명제, 역 모두 성립하는 필요충분조건이고,
(2)는 역일 경우에 성립하지 않는 경우가 있으므로 충분조건이다.
(반례) 역의 경우에서 $A \supset B, A \supset C, B \subset C$ 이면 성립하지 않는다.

15. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, r 은 q 이기 위한 필요조건, s 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \rightarrow q$

② $q \rightarrow \sim p$

③ $s \rightarrow \sim q$

④ $\sim s \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim r \rightarrow p$

해설

$$p \rightarrow q \quad s \rightarrow \sim r \quad q \rightarrow r$$

$$q \rightarrow r \text{의 대우} : \sim r \rightarrow \sim q$$

$$\therefore s \rightarrow \sim r, \sim r \rightarrow \sim q \text{ 이므로 } s \rightarrow \sim q$$

16. x, y 는 양수이고 $\frac{2}{x} + \frac{8}{y} = 3$ 일 때, $x + y$ 의 최솟값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}x + y &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (x + y) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{8}{y} \right) (x + y) \\&= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} + 8 \right) \\&= \frac{1}{3} \left(10 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} \right) \geq \frac{1}{3} \left(10 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{8x}{y}} \right) \\&= \frac{1}{3}(10 + 8) = 6\end{aligned}$$