1. 다음 중 무한집합을 모두 골라라.

> ㉠ $A = \{x \mid x$는 아시아에 속하는 국가$\}$
>
> ㉡ $B = \{x \mid x$는 100보다 큰 자연수$\}$
>
> ㉢ $C = \{x \mid x$는 20 이상의 자연수$\}$
>
> ㉣ $D = \{x \mid x$는 방위의 종류$\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ $A = \{$대한민국, 일본, 중국, $\cdots$, 싱가포르$\}$: 유한집합
㉡ $B = \{100, 101, 102, \cdots\}$: 무한집합
㉢ $C = \{20, 21, 22, 23, 24, \cdots\}$: 무한집합
㉣ $D = \{$동, 서, 남, 북$\}$: 유한집합

2. 집합 $A = \{1,\ 3,\ \{1,\ 3\}\}$ 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

원소의 개수가 3 개 이므로 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$ (개) 이다.

3. 집합 $\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합 중에서 원소 3 을 포함하지 않는 부분집합으로 옳은 것은?

① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$ ③ $\{2, 5\}$

④ $\{1, 2, 5\}$ ⑤ $\{1, 2, 3, 5\}$

해설

원소 3 을 제외한 $\{1, 5\}$ 의 부분집합을 구하면
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$,$\{1, 5\}$ 이고, 그것이 원소 3 을 포함하지 않는 집합 $\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합이다.

4. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1,2,4,5,7,8\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ 일 때, $A - B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1,5,7\}$

해설

$A \cap B = \{2,4,8\}$ 이므로 $A - B = \{1,5,7\}$

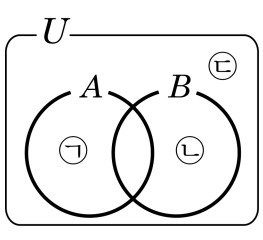
5. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 $A^c \cap B^c$를 구하면?

① $\{1,\ 3\}$ ② $\{2,\ 4\}$ ③ $\{3,\ 5\}$ ④ $\{4,\ 8\}$ ⑤ $\{6,\ 8\}$

해설

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$이고 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = U - (A \cup B) = \{6,\ 8\}$

6. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 35$, $n(A) = 20$, $n(B) = 17$, $n(A \cap B) = 10$ 일 때, ㉠, ㉡, ㉢의 원소의 개수를 차례대로 구하여라.



▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠ : 10

▷ 정답: ㉡ : 7

▷ 정답: ㉢ : 8

해설

㉠ 부분을 집합으로 나타내면 $A - B$이므로
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 10 = 10$이다.
㉡ 부분을 집합으로 나타내면 $B - A$이므로
$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 17 - 10 = 7$이다.
㉢ 부분을 집합으로 나타내면 $(A \cup B)^C$이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 20 + 17 - 10 = 27\text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 $n((A \cup B)^C) = 35 - 27 = 8$이다.

7. 다음 중 거짓인 명제는?

① 직사각형은 사다리꼴이다.

② $x > 3$이면 $x > 5$ 이다.

③ $a = b$이면 $a^3 = b^3$ 이다.

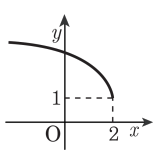
④ x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.

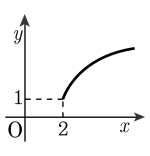
⑤ $(x-3)(y-5) = 0$이면 $x = 3$ 또는 $y = 5$이다.

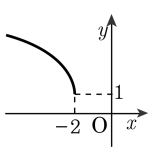
해설

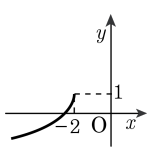
반례 : $x = 4$

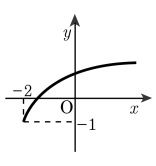
8. 함수 $y = 2\sqrt{-3x+6}+1$ 의 그래프는?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$y = 2\sqrt{-3(x-2)}+1$
⇒ 꼭짓점 : $(2, 1)$
정의역 : $x \le 2$, 치역 : $y \ge 1$

9. 첫째항이 -10, 공차가 -3인 등차수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $-3n-7$ ② $-3n-5$ ③ $-n-7$

④ $-n-5$ ⑤ $-n+3$

해설

$a_n = -10 + (n-1)\cdot(-3) = -3n-7$

10. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{2n+1}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항과 공비 r을 차례대로 구하면?

① $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{6} \cdot 3$ ③ $\frac{9}{2},\ 9$ ④ $\frac{1}{6},\ 9$ ⑤ $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$

해설

$a_1 = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2},\ \frac{1}{6} \cdot 3^5 = \frac{81}{2}$

$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{81}{2}}{\frac{9}{2}} = 9$

$\therefore a_1 = \frac{9}{2},\ r = 9$

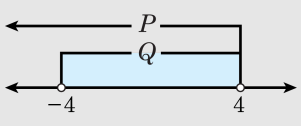
11. $x < 4$는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4,\ q : -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

12. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$
$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$
$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$
이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로
$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$
따라서 최댓값은 14이다.

13. $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이라 한다. X의 임의의 원소 x에 대하여 다음과 같은 X에서 Y로의 대응을 생각할 때, 이 중 X에서 Y로의 함수인 것은?

① $x \to x+3$

② $x \to x^2-1$

③ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \to 1 \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \to 0 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \to \text{홀수} \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \to 2 \end{cases}$

⑤ $x \to x^3$

해설

X에서 Y로의 함수가 되려면 X의 원소가 빠짐없이 Y의 원소 하나에 대응해야 한다.
순서대로 대응도를 만들어 보면 다음과 같다.

①, ②, ⑤는 Y의 원소에 대응하지 않는 X의 원소가 존재하므로 함수가 될 수 없고 ④는 X의 원소 하나가 Y의 원소 두 개에 대응하는 경우가 생기므로 역시 함수가 될 수 없다.

14. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-10x-5$, $g(x)=-x^2+2x+10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x)=g(x)$이므로
$2x^2-10x-5=-x^2+2x+10$에서
$3x^2-12x-15=0$, $3(x^2-4x-5)=0$
$(x-5)(x+1)=0$
$\therefore\ x=5,\ -1$
즉, $x=5$ 또는 $x=-1$일 때 $f(x)=g(x)$이다.
$\therefore\ X=\{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

15. 두 함수 $f(x)=3x+1$, $g(x)=-x^2+x$ 에 대하여 $(f\circ g)(2)$, $(g\circ f)(2)$의 함숫값을 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -47 ② -35 ③ 12 ④ 37 ⑤ 47

해설

$a=(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(-2)=-5$
$b=(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(7)=-42$
$\therefore\ a-b=-5-(-42)=37$

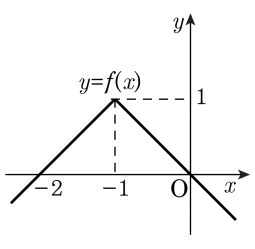
16. 함수 $f(x)=ax+3$ 에 대하여 $f^{-1}=f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1}=f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면
$f^{-1}\circ f=f\circ f$
이때, $f^{-1}\circ f=I$(I는항등함수) 이므로 $f\circ f=I$
즉 $(f\circ f)(x)=x$
$\therefore (f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+3)$
$=a(ax+3)+3=a^2x+3a+3=x$
따라서 $a^2=1,\ 3a+3=0$ 이므로 $a=-1$

17. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프의 관계식을 구하면?



① $y = |x-1| - 1$

② $y = |x+1| - 1$

③ $y = |x-1| + 1$

④ $y = -|x+1| + 1$

⑤ $y = -|x+1| - 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = -|x|$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로
$y = -|x|$ 에 x 대신 $x+1$,
y 대신 $y-1$ 을 대입하면 $y-1 = -|x+1|$
즉, $f(x) = -|x+1| + 1$ 이므로 $y = -|x+1| + 1$

18. $x : y = 2 : 3$ 일 때, $\dfrac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy}$ 의 값을 구하여라.

① $\dfrac{12}{5}$ ② $\dfrac{5}{12}$ ③ $\dfrac{13}{5}$ ④ $\dfrac{5}{13}$ ⑤ 5

해설

$x : y = 2 : 3 \Rightarrow x = 2k, y = 3k$

$$\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy} = \frac{3(2k)^2 + 2(2k)(3k)}{4k^2 + (2k)(3k)}$$

$$= \frac{24k^2}{10k^2} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

19. $-1 < a < 2$일 때, $\sqrt{(a-2)^2} + |a+1|$을 간단히 하면?

① 3 ② -3 ③ $2a-1$

④ $2a+1$ ⑤ $-2a+1$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-2)^2} + |a+1| &= |a-2| + |a+1| \\ &= -(a-2) + a + 1 = 3\end{aligned}$$

20. 유리수 a, b가 등식 $(a+\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$를 만족시킬 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$
무리수의 상등에 의하여
유리수 부분 : $(a^2 + 2) = 6$, $a^2 = 4$
무리수 부분 : $2a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, $2a = b$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4, \ ab = 8 \\ a = -2, b = -4, \ ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$\therefore ab = 8$

21. 분수함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프의 점근선이 $x=a,\ y=b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=\dfrac{2x-1}{x-1} \Rightarrow y=2+\dfrac{1}{x-1}$ 이므로,
점근선은 $y=2,\ x=1$ 이다.
$\therefore a+b=3$

22. 다음 함수의 그래프 중 평행이동에 의하여 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹치는 것은?

① $y=\frac{2x-1}{x-1}$ ② $y=\frac{2x}{x-1}$ ③ $y=\frac{2x+1}{x-1}$
④ $y=\frac{2x}{2x-1}$ ⑤ $y=\frac{2x}{2x+1}$

해설

① $y=\frac{2x-2+1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}$
② $y=\frac{2x-2+2}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$
③ $y=\frac{2x-2+3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$
④ $y=\frac{2x-1+1}{2x-1}=1+\frac{1}{2x-1}$
⑤ $y=\frac{2x+1-1}{2x+1}=1-\frac{1}{2x+1}$

따라서, ① 의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축, y 축 방향으로 각각 1, 2 만큼 평행이동시킨 것이다.

23. $y=\dfrac{3-ax}{1-x}$ 의 그래프의 점근선이 $x=1$, $y=-2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$y=\dfrac{3-ax}{1-x}=\dfrac{ax-3}{x-1}=\dfrac{a-3}{x-1}+a$

이 분수함수의 점근선은 $x=1$, $y=a$

$\therefore\ a=-2$

24. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a 의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

$y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ 에서 $y(x-1)=ax+1$

$yx-y=ax+1,\ yx-ax=1+y$

$x(y-a)=1+y,\ x=\dfrac{1+y}{y-a}$

$\therefore\ y^{-1}=\dfrac{x+1}{x-a}$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$\dfrac{x+1}{x-a}=\dfrac{ax+1}{x-1}$

$\therefore a=1$

25. 수열 a, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, b, $\cdots$ 가 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설

공차를 d라 하면 $d=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

26. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

27. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n + 2$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 이므로

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2)$

$= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9)$

$= 16$

28. 다음 보기중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 모두 몇 개인가?(단, a, b 는 실수, n 은 자연수이다.)

보기

㉠ $p : a = 0$ 이고 $b = 0$, $q : a^2 + b^2 = 0$

㉡ $p : n$ 은 홀수, $q : n^2$ 은 홀수

㉢ p: 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \subset C$, $B \subset C$, $q : (A \cup B) \subset C$

㉣ $p : a + bi = 0$, $q : ab = 0$

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

㉠, ㉡, ㉢이 참이다.

㉠ p, q 모두 $a = b = 0$ 임을 보여주는 식이므로 필요충분조건이 성립한다.

㉡ 일반적인 홀수 $n = 2m - 1$ 이라 했을 때,
$n^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1$ 인데,
$2(2m^2 - 2m) + 1 = 2k + 1$
즉, 홀수 꼴이므로 제곱수 역시 홀수가 된다.

㉢ p, q 두 조건 모두가 A, B 가 C 에 포함된다는 것을 의미하므로 필요충분조건이 성립한다.

㉣ p 조건은 a, b 모두가 0 임을 나타내고 q 는 a 또는 b 가 0 이라는 것을 의미하므로 충분조건만이 성립한다.

29. 전체집합 U 에 대하여 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. 이 집합의 포함 관계가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?

① r 는 p 또는 q 이기 위한 필요조건이다.

② $\sim r$ 는 $\sim p$ 또는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

③ r 는 p 이고 q 이기 위한 충분조건이다.

④ r 는 p 이고 q 이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ $\sim r$ 는 p 이고 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$R \subset (P \cup Q)$, $R \subset (P \cap Q)$ 이므로

① r는 p 또는 q 이기 위한 충분조건이다.

③ r는 p이고 q이기 위한 충분조건이다.

30. $a > b,\ x > y$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a+b)(x+y) > 2(ax+by)$

② $(a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

③ $(a+b)(x+y) \geq 2(ax+by)$

④ $(a+b)(x+y) \leq 2(ax+by)$

⑤ $(a+b)(x+y) = 2(ax+by)$

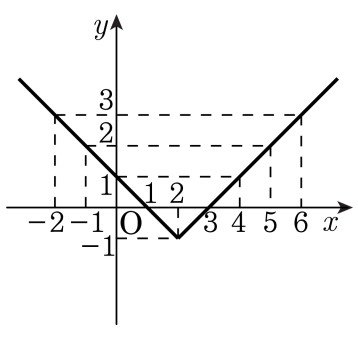
해설

$$\begin{aligned}&(a+b)(x+y) - 2(ax+by)\\ &= ay + bx - ax - by\\ &= a(y-x) - b(y-x)\\ &= (a-b)(y-x)\end{aligned}$$

그런데 $a-b > 0,\ y-x < 0$

$\therefore (a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

31. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면
$f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$
$X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$
$X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$
따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

32. $2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}=\cfrac{37}{13}$을 만족시키는 정수 x,y,z에 대하여 $x+y+z$의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

2를 우변으로 이항하고 정리하면

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}=\cfrac{11}{13}$$

역수를 취하면 $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\cfrac{13}{11}=1+\cfrac{2}{11}$

$\therefore x=1$

또, $y+\cfrac{1}{z}=\cfrac{11}{2}=5+\cfrac{1}{2}$

$\therefore y=5, z=2$

따라서 $x+y+z=8$

33. $6-\sqrt{3}$의 정수 부분을 x, 소 수부분을 y라 할 때 $\frac{1}{x}\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$6-\sqrt{3}=4+(2-\sqrt{3})\ (\because 0<2-\sqrt{3}<1\ )$

$\therefore x=4,\ y=2-\sqrt{3},\ \frac{1}{y}=2+\sqrt{3}$

$\therefore y+\frac{1}{y}=4,$

$y^3+\frac{1}{y^3}=\left(y+\frac{1}{y}\right)^3-3\left(y+\frac{1}{y}\right)=52$

$\therefore \frac{1}{x}\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)=\frac{1}{4}\cdot 52=13$

34. $x=\sqrt{10+8\sqrt{3+\sqrt{8}}}$일 때 x^2-8x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -14

해설

$x=\sqrt{10+8\sqrt{3+\sqrt{8}}}$

$=\sqrt{10+8\sqrt{(2+1)+2\sqrt{2\cdot1}}}$

$=\sqrt{10+8(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{18+8\sqrt{2}}$

$=\sqrt{18+2\sqrt{32}}=\sqrt{(16+2)+2\sqrt{16\cdot2}}$

$=\sqrt{16}+\sqrt{2}=4+\sqrt{2}$

$\therefore x-4=\sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $(x-4)^2=(\sqrt{2})^2$

$x^2-8x+16=2$

$\therefore x^2-8x=-14$

35. 등차수열을 이루는 세 수의 합은 12이고 세 수의 합은 12이고 제곱의 합은 66일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하면

$(a-d)+a+(a+d)=12\cdots$㉠

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=66\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립해서 풀면 $a=4,\ d=\pm 3$

따라서 주어진 조건을 만족하는 세 수는 1, 4, 7이고 이 중 가장 큰 수는 7이다.

36. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 두 등차수열 $\{2a_n\}$, $\{3a_n+2\}$의 공차의 합은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로
$a_{n+1}-a_n=2$
수열 $\{2a_n\}$의 공차를 d_1이라 하면
$d_1=2a_{n+1}-2a_n=2(a_{n+1}-a_n)=2\times2=4$
수열 $\{3a_n+2\}$의 공차를 d_2이라 하면
$d_2=(3a_{n+1}+2)-(3a_n+2)=3(a_{n+1}-a_n)=3\times2=6$
$\therefore\ d_1+d_2=4+6=10$

37. 첫째항부터 제10항까지의 합은 85, 제 11항부터 제20항까지의 합은 385인 등차수열이 있다. 이때, 이 수열 $\{a_n\}$의 제 21항부터 제30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 685

해설

주어진 수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_{10} = 85,\ S_{20} = S_{10} + 385 = 85 + 385 = 470$

$S_{10} = \dfrac{10(2a + 9d)}{2} = 85 \cdots ㉠$

$S_{20} = \dfrac{20(2a + 19d)}{2} = 470 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -5,\ d = 3$

$\therefore\ S_{30} = \dfrac{30\{2 \cdot (-5) + 29 \cdot 3\}}{2} = 1155$

따라서 구하는 합은 $1155 - 470 = 685$

38. 수열 $\log\frac{1000}{3}$, $\log\frac{1000}{9}$, $\log\frac{1000}{27}$, $\log\frac{1000}{81}$, $\cdots$ 에서 첫째항부터 몇째 항까지의 합이 최대가 되는가? (단, $\log 3 = 0.4771$)

① 제 5항 ② 제 6항 ③ 제 7항
④ 제 8항 ⑤ 제 9항

해설

$$\log\frac{1000}{3} = \log 10^3 - \log 3$$
$$= 3 - \log 3$$
$$\log\frac{1000}{9} = 3 - 2\log 3$$
$$\log\frac{1000}{27} = 3 - 3\log 3$$

이므로 주어진 수열은

$a = 3 - \log 3$

$d = -\log 3$ 인 등차수열

$a_n = (3 - \log 3) + (n-1)\cdot(-\log 3)$

$= 3 - n\cdot\log 3$

그런데 $\log 3 = 0.4771$ 이므로

$a_6 = 3 - 6\log 3 = 0.1374$

$a_7 = 3 - 7\log^3 = -0.3397$

$\therefore$ 6번째 항까지의 합이 최대

39. 수열 $a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$ 의 합은? (단, $r \neq 0$)

① $\dfrac{2a+4r^n}{r}$
② $\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$
③ $\dfrac{a(1+r)+(1+r)^n}{r}$
④ $\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^{2n}-1\}}{r}$
⑤ $\dfrac{a(1+r)-r^n+2}{r}$

해설

첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$, 항수가 n인 등비수열의 합이므로 $1+r \neq 1$ 즉, $r \neq 0$ 일 때,

$$S = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}$$

$$= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

40. 재진이가 첫날에 1원, 둘째날에 2원, 셋째날에 4원, ⋯ 과 같이 매일 전날의 2배씩 30일간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

① $2^{30}-2$(원) ② $2^{30}-1$(원) ③ 2^{30}(원)

④ $2^{30}+1$(원) ⑤ $2^{30}+2$(원)

해설

첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_{30}=\frac{1\cdot(2^{30}-1)}{2-1}=2^{30}-1\text{(원)}$$

41. 자연수를 원소로 하는 집합 A가 「$x \in A$ 이면 $5 - x \in A$이다.」를 만족한다. 이러한 성질을 만족하는 집합 A의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

x 와 $5 - x$가 자연수이므로 $x \geq 1$, $5 - x \geq 1$ $\therefore$ $1 \leq x \leq 4$
㉠ $1 \in A$이면 $5 - 1 = 4 \in A$
㉡ $2 \in A$이면 $5 - 2 = 3 \in A$이므로
1, 4는 동시에 집합 A에 속하고, 마찬가지로 2, 3 도 동시에 집합 A에 속해야 한다.
따라서, 구하는 집합 A 는 $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 3 개다.

42. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$$\{1,\ 3\} \subset X \subset A,\ n(X) = 4$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

X 는 원소 1, 3 을 뺀 $\{2,\ 4,\ 5\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2 개인 부분집합에 원소 1, 3 을 포함시킨 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 의 3 개이다.

43. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} 개이다.

$2^{n-3} = 32,\ 2^{n-3} = 2^5$

$n - 3 = 5$ 이므로 $n = 8$

44. $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, 10\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 $A \cup X = A, (A - B) \cap X = A - B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

$A \cup X = A$ 이므로 $X \subset A$ 이고 $(A - B) \cap X = A - B$ 이므로 $(A - B) \subset X$ 이다. $\therefore (A - B) \subset X \subset A$
$A - B = \{6, 8, 10\}$ 이므로 집합 X는 6, 8, 10 을 반드시 포함하는 A 의 부분집합이다.
따라서 $2^{5-3} = 2^2 = 4$(개) 이다.

45. 어떤 반에서 A, B두 종류의 책에 대하여 그것을 읽었는지 여부를 조사하였더니 A를 읽은 학생은 전체의 $\frac{1}{2}$, B를 읽은 학생은 전체의 $\frac{3}{5}$, 두 종류 모두 읽은 학생은 전체의 $\frac{3}{10}$, 하나도 읽지 않은 학생은 8명이었다. 반 전체의 학생 수는 몇 명인가 ?

① 10 명 ② 20 명 ③ 30 명 ④ 40 명 ⑤ 50 명

해설

A, B두 종류의 책을 읽은 학생의 집합을 각각 A, B라 하고, 그 반 전체의 인원수를 N이라 하면, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-\frac{3}{10}\right)N=\frac{4}{5}N$

따라서, $n(A^c\cap B^c)=n((A\cup B)^c)=N-n(A\cup B)=\frac{1}{5}N$

그런데, $\frac{1}{5}N=8$ 이므로 $N=40$(명)

46. 다음은 양수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때, $P=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2x^2+2y^2+2z^2$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2(x^2+y^2+z^2)$
$\therefore P^2 \geq$ (가)
따라서, P 의 최솟값은 (나) 이고,
등호는 $x=y=z=$(다) 일 때, 성립한다.

위의 과정에서 (가)~(다)에 각각 알맞은 것은?

① 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ ② 9, 3, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}$
④ 3, $\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

$P^2=\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}+2(x^2+y^2+z^2)$
조건에서 $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로
$P^2=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2}+\frac{x^2y^2}{z^2}\right)$
$+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+2$
$\geq\sqrt{\frac{y^2z^2}{x^2}\cdot\frac{z^2x^2}{y^2}}+\sqrt{\frac{z^2x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{z^2}}$
$+\sqrt{\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}}+2$
$=x^2+y^2+z^2+2=(3)$

$\therefore$ $P\geq\sqrt{3}$ 이므로 P의 최솟값은 ($\sqrt{3}$) 이고,
등호는 $x=y=z=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 일 때 성립한다.
$\because$ $x^2+y^2+z^2=1$ 이므로 $x=y=z$ 이면 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.
$\therefore$ (가) 3 (나) $\sqrt{3}$ (다) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

47. 임의의 정수 k에 대하여 $f(k) = 2k - 1$이라 하고, 연산 $\diamond$를 $f(m) \diamond f(n) = f(2m + n)$로 정의한다. 이 때, $-3 \diamond 5$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$f(m) = -3,\ f(n) = 5$라 하면
$2m - 1 = -3,\ 2n - 1 = 5$
$\therefore\ m = -1,\ m = 3$
$\therefore -3 \diamond 5 = f(-1) \diamond f(3) = f(-2 + 3) = f(1) = 1$

48. 세 함수 f, g, h 에 대하여 $f(x) = x+4$, $g(x) = -2x+3$ 이고 $\left(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h\right)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h^{-1}(5)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

두 함수 $f(x) = x+4$, $g(x) = -2x+3$ 에 대하여
$f^{-1} \circ g^{-1} \circ h = f$ 이므로
$g^{-1} \circ h = f \circ f$, $h = g \circ f \circ f$
$\therefore h(x) = g(f(f(x)))$
$= g(f(x+4))$
$= g((x+4)+4)$
$= g(x+8)$
$= -2(x+8)+3 = -2x-13$
$h^{-1}(5) = a$ 라고 하면 $h(a) = 5$
$-2a-13 = 5, \ -2a = 18$
$\therefore a = -9$
$\therefore \ h^{-1}(5) = -9$

49. 분수식 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}$ 의 값을 구하면?

① $-1, 2$ ② $1, 2$ ③ $2, \frac{1}{2}$ ④ $1, \frac{1}{2}$ ⑤ $-1, \frac{1}{2}$

해설

$\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$

$b+c=ak \cdots ㉠$

$a+c=bk \cdots ㉡$

$a+b=ck \cdots ㉢$

$㉠+㉡+㉢$하면

$2(a+b+c)=k(a+b+c)$

i) $a+b+c \neq 0$이면 $k=2$

ii) $a+b+c=0$일 때 $b+c=-a$

$\frac{b+c}{a}=\frac{-a}{a}=-1$

$\therefore k=-1, 2$

50. $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}, y=\sqrt{2-\sqrt{3}}$일 때, $\frac{y^3}{x}+\frac{x^3}{y}$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$$xy=\sqrt{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})}=1$$

$$x^2=2+\sqrt{3} \quad y^2=2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{x}+\frac{x^3}{y}=\frac{x^4+y^4}{xy}$$

$$=\frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{1}=14$$