1. 두 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $Y=\{y|y$는 정수$\}$일 때, 함수 $f:X\to Y$를 다음과 같이 정의한다. 이 때, f의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x>0) \\ -x^2+1 & (x\le 0)\end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(-2)=-(-2)^2+1=-3$

$f(-1)=-(-1)^2+1=0$

$f(0)=1$

$f(1)=1+2=3$

$f(2)=2+2=4$

따라서 치역은 $\{-3,\ 0,\ 1,\ 3,\ 4\}$이므로

모든 원소의 합은 $(-3)+0+1+3+4=5$

2. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 의 개수를 구하면?

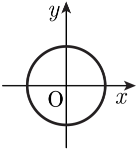
① 6 개 ② 8 개 ③ 18 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

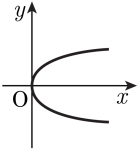
$3 \times 3 \times 3 = 27$

3. 다음 그래프 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프가 될 수 있는 것은?

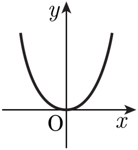
①



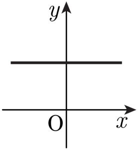
②



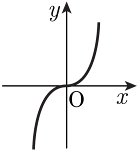
③



④



⑤



해설

일대일 대응의 정의에 의해 ⑤번이다.

4. 일차함수 $y = px + q$ 의 역함수가 $y = -5x + 7$ 일 때, 상수 p, q 의 합 $p + q$ 는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ 4 ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 8

해설

$y = -5x + 7$ 의 역함수를 구하면

$x = -5y + 7,\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$

$p = -\frac{1}{5},\ q = \frac{7}{5}$

$\therefore p + q = \frac{6}{5}$

5. 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f^{-1}(2)$ 의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$f^{-1}(2) = a$ 라 하면, $f(a) = 2$ 이므로 $2a - 3 = 2$

$\therefore\ a = \frac{5}{2}$

6. 두 함수 f, g 가 $f(2)=3$, $g^{-1}(1)=4$ 일 때, $f^{-1}(3)+g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2)=3$ 에서 $f^{-1}(3)=2$ 이고
$g^{-1}(1)=4$ 에서 $g(4)=1$ 이므로
$f^{-1}(3)+g(4)=2+1=3$

7. 분수함수 $y=\dfrac{3x-2}{2-x}$의 점근선의 방정식이 $x=a,\ y=b$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=-1$

해설

$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$의 점근선은 $x=-\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{a}$이므로

주어진 분수함수의 점근선은 $x=2,\ y=-3$이다.

$\therefore 2+(-3)=-1$

8. 분수함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프의 점근선이 $x=a,\ y=b$ 일 때, 상수 a,b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y=\dfrac{2x-1}{x-1}\quad\Rightarrow\quad y=2+\dfrac{1}{x-1}$ 이므로,

점근선은 $y=2,\ x=1$ 이다.

$\therefore a+b=3$

9. 분수함수 $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$ 의 역함수를 구하면?

① $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$ ② $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ ③ $y=\dfrac{-2x+3}{x-2}$

④ $y=\dfrac{-2x-3}{x-2}$ ⑤ $y=\dfrac{2x-3}{x+2}$

해설

$y=\dfrac{2x-3}{x+2}$ 에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$y(x+2)=2x-3,\ (y-2)x=-2y-3,$

$x=\dfrac{-2y-3}{y-2}$

x와 y를 바꾸면, $y=\dfrac{-2x-3}{x-2}$

따라서 구하는 역함수는 $y=\dfrac{-2x-3}{x-2}$

10. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.

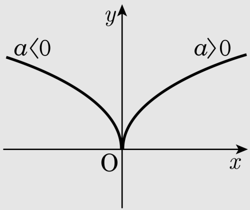
③ $y = -\sqrt{ax}$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.

④ $y = \sqrt{-ax}$ 와 y 축에 대하여 대칭이다.

⑤ $a > 0$ 이면 원점과 제 1사분면을 지난다.

해설

$a > 0$일 때와 $a < 0$일 때의 $y = \sqrt{ax}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 ②,③,④,⑤는 참임을 알 수있다.

그러나 $a > 0$일 때의 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$

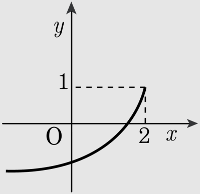
$a < 0$일 때의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$이므로 ①은 틀린 것이다.

11. 좌표평면에서 무리함수 $y = -\sqrt{-x+2}+1$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?

① 제 1사분면
② 제 2사분면
③ 제 3사분면
④ 제 1사분면, 제 2사분면
⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은 제 2사분면이다.

12. 다음 중 무리함수 $y = \sqrt{-3x + 1 + \sqrt{-12x}}$ 의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \geq 0\}$, $\{y \mid y \geq 1\}$　② $\{x \mid x \leq 0\}$, $\{y \mid y \geq 1\}$

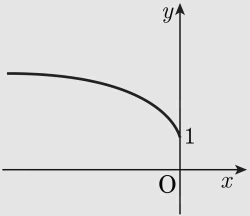
③ $\{x \mid x \geq 1\}$, $\{y \mid y \leq 0\}$　④ $\{x \mid x \leq 1\}$, $\{y \mid y \geq 0\}$

⑤ $\{x \mid x \leq 0\}$, $\{y \mid y \leq 1\}$

해설

$$y = \sqrt{-3x + 1 + \sqrt{-12x}}$$
$$= \sqrt{-3x + 1 + 2\sqrt{(-3x) \cdot 1}}$$
$$= \sqrt{-3x} + 1$$

따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,

치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$

13. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2,\ g(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2$일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

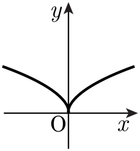
$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$

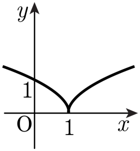
$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$

14. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$의 그래프를 구하면?

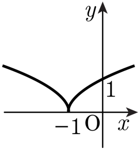
①



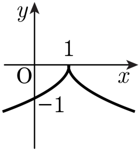
②



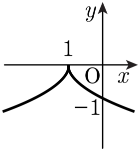
③



④



⑤



해설

$x \geq -1$이면 $y = \sqrt{x+1}$

$x < -1$이면 $y = \sqrt{-x-1}$이므로

3번이 정답임.

15. 다음의 윗줄은 자연수, 아랫줄은 정수이다. 이 도식이 의미하는 뜻과 가장 가까운 것은?

$$\begin{array}{lccccccccc} \text{자연수;}\cdots, & 6, & 4, & 2, & 1, & 3, & 5, & 7. & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \text{정수;}\cdots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & \cdots \end{array}$$

① 정수는 무한히 많다.

② 자연수는 무한히 많다.

③ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일함수가 존재할 수 없다.

④ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일대응이 존재한다.

⑤ 정수의 개수가 자연수의 개수보다 많다.

해설

문제의 대응은 자연수의 집합과
정수의 집합 사이에 서로 모자라는 것도 없고
남는 것도 없으며 2번씩 대응되는 것도 없는 대응,
즉 일대일 대응임을 알 수 있다.

16. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f\ :\ A\ \rightarrow\ B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$ 이들 중
적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

17. 0이 아닌 실수에서 정의되는 두 함수 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 - x$에 대하여 $h(x) = f(g(x))$ 라고 할 때 $h(x) = \frac{99}{100}$ 를 만족시키는 실수 x 의 값은?

① -99 ② -98 ③ -97 ④ -96 ⑤ -95

해설

$h(x) = f(1-x) = 1 - \frac{1}{1-x}$

$1 - \frac{1}{1-x} = \frac{99}{100}, 1 - x = 100, x = -99$

18. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x에 대하여 성립하므로 $k = 0$

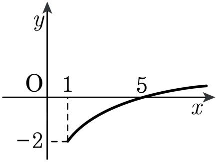
19. 분수함수 $f(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$ 에 대하여 $f(x)+g(x)=1$ 을 만족하는 $g(x)$ 는?

① $x+2$ ② $x+1$ ③ $\dfrac{1}{x+2}$ ④ $\dfrac{1}{x+1}$ ⑤ $\dfrac{1}{x}$

해설

$$f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$$
$$= \frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}}$$
$$= \frac{x+1}{x+2}$$
$$= 1 - \frac{1}{x+2}$$
$$\therefore g(x) = 1 - f(x)$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{x+2}\right)$$
$$= \frac{1}{x+2}$$

20. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?



① 1 ② -1 ③ 2

④ -2 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$의 그래프를 보면

점$(1, -2)$에서부터 시작하므로

$-\dfrac{b}{a} = 1,\ c = -2$

$\therefore -b = a\ ,\ c = -2$

$y = \sqrt{ax-a}-2$가 점$(5, 0)$을 지나므로

$0 = \sqrt{5a-a}-2,\ 2 = \sqrt{4a}$

양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$\therefore\ a = 1$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$이므로

$a+b+c = 1-1-2 = -2$

21. $0 \le x \le 1$ 일 때 $f(x) = x(1-x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = \frac{1}{2}f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$가 있다. 이 때 $f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값은?

① $-\frac{3}{16}$ ② $-\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

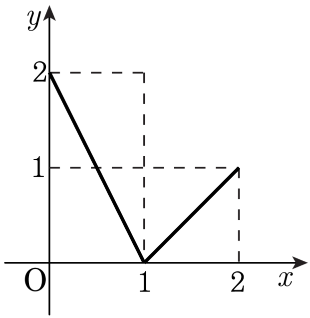
해설

$$f(x+1) = \frac{1}{2}f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}f(x-1)$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

22. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다.



$f \circ f = f^2,\ f \circ f^2 = f^3,\ \cdots,\ f \circ f^n = f^{n+1}$ 로 정의할 때, $f^{10}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은? (단, n은 자연수)

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

그림에서

$f(x) = \begin{cases} -2x + 2\ (0 \le x \le 1) \\ x - 1 (1 \le x \le 2) \end{cases}$ 이므로,

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$

$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f(\frac{1}{3}) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{4}{3}$

$\vdots$

$f^{10}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

23. 함수 $2|x|+|y|=4$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

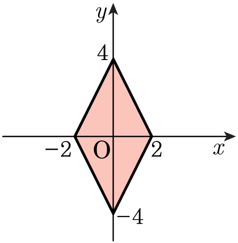
▶ **답 :**

▷ **정답 :** 16

해설

$2|x|+|y|=4$ 의 그래프는 $2x+y=4$, 즉 $y=-2x+4$ 의 그래프에서 $x \geq 0,\ y \geq 0$ 인 부분만 남기고, 이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭시킨 것이므로 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 $8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 16$



24. 함수 $y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 가 세 점에서 만날 때, 상수 k 의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

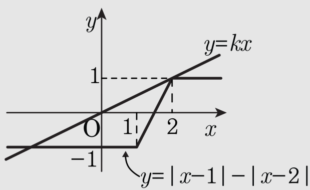
$y = |x-1| - |x-2|$

(i) $x \geq 2$ 일 때, $y = x - 1 - (x-2) = 1$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$

(iii) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1) + (x-2) = -1$

$y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$y = kx$ 의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $y = kx$ 의 그래프가 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때

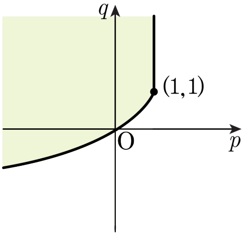
$1 = 2k \quad \therefore k = \frac{1}{2}$

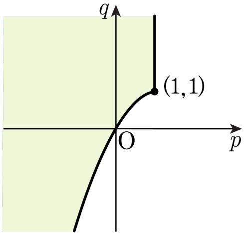
따라서 두 그래프가 세 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는

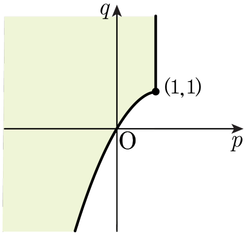
$0 < k < \frac{1}{2}$ 이다.

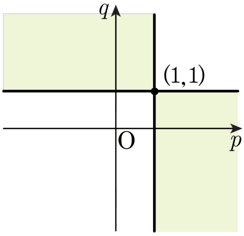
그러므로 보기 중 위 범위에 속하지 않는 것은 ① 이다.

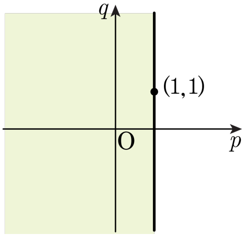
25. 좌표평면에서 무리함수 $y = \sqrt{x-p}+q$ 의 그래프가 도형 $A = \{(x,y) \mid x = 1$이고$y \geq 1\}$과 한 점에서 만난다고 한다. 이 때, 점 (p,q)가 존재하는 영역을 나타낸 것은? (단, 경계선 포함)

①


②


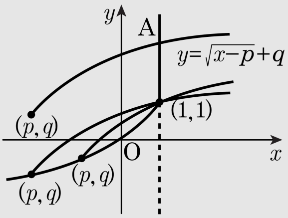
③


④


⑤


해설

무리함수 $y = \sqrt{x-p}+q$ 의 그래프는 점 (p,q) 에서 시작하여 오른쪽 위로 증가하는 곡선이다.
곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$ 가 반드시 반직선 A와 만나기 위해서는 점 (p,q)가 직선 $x=1$의 왼쪽에 놓여야 한다.



$\therefore\ p \leq 1 \cdots$ ㉠
또한, 곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$가 반직선 A와 한 점에서 만나는 경우 중 가장 아래쪽에 놓일 때는
곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$가 점 $(1,1)$을 지날 때이다.
점 $(1,1)$을 지나는 경우는 $1 = \sqrt{1-p}+q$에서 $q = 1-\sqrt{1-p}$
$\therefore\ q \geq 1-\sqrt{1-p} \cdots$ ㉡
㉠,㉡에 의하여 구하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.