

1. 등차수열 $10, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, -390$ 에서 공차는?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$b_1 = 10, b_2 = a_1, b_3 = a_2, \dots,$$

$$b_{100} = a_{99}, b_{101} = -390$$

$$\therefore b_{101} = 10 + (101 - 1) \cdot d = -390$$

$$100d = -400$$

$$\therefore d = -4$$

2. 이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, α, β 의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 6$ 이므로 α, β 의 등차중항은

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3. 수열 $-3, a, b, c, 13$ 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 10

② 15

③ 20

④ 25

⑤ 30

해설

$$a - (-3) = d$$

$$b - a = d$$

$$c - b = d$$

$$13 - c = d$$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

$$\text{더하면 } 13 - (-3) = 4d \therefore d = 4$$

$$\therefore a = -3 + 4 = 1$$

$$b = 1 + 4 = 5$$

$$c = 5 + 4 = 9$$

$$\therefore a + b + c = 15$$

4. 첫째항이 -43 , 공차가 7 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 8항

② 제 9항

③ 제 10항

④ 제 11항

⑤ 제 12항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -43 + (n-1) \times 7 = 7n - 50$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$7n - 50 > 0, 7n > 50$$

$$\therefore n > \frac{50}{7} = 7.14\dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, $a_4 + a_7$ 의 값은?

① 12

② 18

③ 24

④ 30

⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 120 \quad \therefore 2a + 9d = 24$$

$$a_4 + a_7 = (a + 3d) + (a + 6d) = 2a + 9d = 24$$

6. 집합 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3 이 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$ 이다.)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow \text{등차수열}$$

① 공차가 2인 경우 (4가지)

2, 4, 6 4, 6, 8 6, 8, 10 8, 10, 12

② 공차가 4인 경우 (2가지)

2, 6, 10 4, 8, 12

7. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 다음 두 조건을 만족한다.

(가) a, b, c 는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

(나) $x = 1$ 은 이차방정식의 근이다.

이때, 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근의 곱은?

① -4

② -1

③ 1

④ 4

⑤ 9

해설

a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a + c = 2b \cdots \textcircled{㉠}$$

$x = 1$ 이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이므로

$$a + b + c = 0$$

㉠을 대입하면

$$3b = 0 \quad \therefore b = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$a + c = 0 \quad \therefore a = -c$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow -cx^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

따라서, 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$, 즉 $x^2 - 1 = 0$ 의 두 근의 곱은 근과 계수와의 관계에 의해 -1이다.

8. 서로 다른 세 정수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 와 b^2, c^2, a^2 이 각각 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a + b + c$ 의 값은? (단, $0 < a < 10$)

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

a, b, c 가 등차수열을 이루므로 $2b = a + c \cdots \textcircled{㉠}$

b^2, c^2, a^2 이 등차수열을 이루므로 $2c^2 = b^2 + a^2 \cdots \textcircled{㉡}$

①, ②를 연립하여 풀면

$$2c^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + a^2$$

$$7c^2 - 2ac - 5a^2 = 0 \quad (7c + 5a)(c - a) = 0$$

$$\therefore c = -\frac{5}{7}a (\because c \neq a)$$

a 가 7의 배수이고, $0 < a < 10$ 이므로

$$a = 7, c = -5, b = 1$$

$$\therefore a + b + c = 7 + 1 + (-5) = 3$$

9. 직각삼각형 ABC 의 세 변의 길이가 작은 것부터 순서대로 $4, a, b$ 이고 이 순서로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, 직각삼각형의 넓이는?

① $\frac{8}{3}$

② $\frac{16}{3}$

③ $\frac{32}{3}$

④ $\frac{40}{3}$

⑤ $\frac{64}{3}$

해설

$4 < a < b$ 이고, $4, a, b$ 가 직각삼각형의 세 변의 길이이므로
 $4^2 + a^2 = b^2 \dots \textcircled{㉠}$

또, $4, a, b$ 가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2a = 4 + b, b = 2a - 4 \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡}$ 를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$4^2 + a^2 = (2a - 4)^2, 16 + a^2 = 4a^2 - 16a + 16$$

$$3a^2 - 16a = 0, a(3a - 16) = 0$$

$$\therefore a = \frac{16}{3}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

10. 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이 세 수의 평균은 8이고 분산이 6일 때, 곱 abc 의 값은?

① 360

② 384

③ 400

④ 440

⑤ 510

해설

세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d 라 하면

$$a = b - d, c = b + d \text{ 이므로}$$

$$\frac{(b-d) + b + (b+d)}{3} = 8$$

$$\therefore b = 8$$

$$\therefore a = 8 - d, b = 8, c = 8 + d$$

세 수의 분산이 6이므로

$$\frac{(8-d-8)^2 + (8-8)^2 + (8+d-8)^2}{3} = 6$$

$$\therefore d^2 = 9, d = \pm 3$$

$$\therefore a = 5, b = 8, c = 11 \text{ 또는 } a = 11, b = 8, c = 5$$

$$\therefore abc = 440$$

11. 다음 표에 적당한 수를 넣어 각 행과 각 열이 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 12개의 빈 칸에 들어갈 수들의 총합을 구하여라.

1			7
10			34

▶ 답 :

▷ 정답 : 156

해설

다음 표와 같이 빈 칸에 문자를 대응시키자.

1	a	b	7
c	d	e	f
g	h	i	j
10	k	l	34

각 행과 열이 각각 등차수열을 이루므로

$$a + b = 1 + 7 = 8$$

$$k + l = 10 + 34 = 44$$

$$c + g = 1 + 10 = 11$$

$$f + j = 7 + 34 = 41$$

$$\text{또, } (d + e) + (h + i) = (c + f) + (g + j)$$

$$= (c + g) + (f + j) = 11 + 41 = 52$$

이므로 구하는 총합은

$$8 + 44 + 11 + 41 + 52 = 156$$

12. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 공차가 각각 2, 3 인 등차수열일 때, 수열 $\{a_n + b_n\}$ 의 공차는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 2$$

$$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot 3$$

$$a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n - 1) \cdot 5$$

$$\therefore \text{공차} = 5$$

13. 4와 102사이에 5개의 수를 넣어 등차수열을 만들려고 한다. 이때, 4와 102사이에 넣을 5개의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 265

해설

항의 개수가 7개 이므로 7개 항의 합을 S_7 , 구하는 수의 합을 S 라 하면

$$S = S_7 - (4 + 102) = \frac{7(4 + 102)}{2} - 106 = 265$$

14. -3 과 11 사이에 n 개의 수를 나열한 수열 $-3, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 11$ 이 등차수열을 이루고 그 합이 32 일 때 공차 d 와 항수 n 을 구하면?

① $d = 2, n = 4$

② $d = 2, n = 5$

③ $d = 2, n = 6$

④ $d = 3, n = 4$

⑤ $d = 3, n = 6$

해설

$$b_1 = -3, b_2 = a_1, \dots, b_{n+2} = 11$$

이라하면

$$b_{n+2} = -3 + (n+1)d = 11$$

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= \frac{(n+2)(-3+11)}{2} \\ &= 4(n+2) = 32 \end{aligned}$$

$$\therefore n = 6$$

$$-3 + (n+1) \cdot d = 11 \text{ 이므로}$$

$$d = 2$$

15. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$$S_{10} = a_{11}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$a_{11} = a + 10d$$

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 10a + 45d$$

$$10a + 45d = a + 10d$$

$$9a = -35d$$

$$a = 35 \div \text{므로 } d = -9$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$= \frac{10(70 - 81)}{2}$$

$$= \frac{-110}{2} = -55$$

16. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$ 가 성립할 때, $a_4 : a_7$ 는? (단, $a_1 \neq 0$ 이다.)

① $1 : 2$

② $1 : 3$

③ $2 : 3$

④ $2 : 5$

⑤ $3 : 5$

해설

$$a_3 + a_4 = 2(a_1 + a_2)$$

$$a + 2d + a + 3d = 2(a + a + d)$$

$$2a + 5d = 4a + 2d$$

$$3d = 2a$$

$$\therefore a_4 : a_7 = (a + 3d) : (a + 6d)$$

$$= (a + 2a) : (a + 4a) = 3a : 5a$$

$$= 3 : 5$$

17. x 에 관한 삼차방정식 $x^3 - 9x^2 + 23x - k = 0$ 의 세 실근이 등차수열을 이룰 때, 상수 k 의 값은?

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

세 근을 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$$(a-d) + a + (a+d) = 3a = 9 \quad \therefore a = 3$$

$$(3-d) \cdot 3 + (3-d)(3+d) + 3 \cdot (3+d) = 23$$

$$9 - 3d + 9 - d^2 + 9 + 3d = 23$$

$$27 - d^2 = 23, \quad d^2 = 4 \quad \therefore d = \pm 2$$

$$\text{그런데 } (3-d) \cdot 3 \cdot (3+d) = k$$

$$3(9 - d^2) = k$$

$$3(9 - 4) = k \quad \therefore k = 15$$

$$a = 3, \quad k = 15$$

18. 첫째항이 3이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 이 수열의 처음 n 개의 항의 합이 다음 n 개의 항의 합의 $\frac{1}{3}$ 과 같을 때, d 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

해설

첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면 문제의 조건으로부터

$$S_n = \frac{1}{3}(S_{2n} - S_n), \quad 3S_n = S_{2n} - S_n$$

$$\therefore S_{2n} = 4S_n$$

$$\frac{2n \{2 \cdot 3 + (2n-1)d\}}{2} = 4 \cdot \frac{n \{2 \cdot 3 + (n-1)d\}}{2}$$

$$6 + (2n-1)d = 2 \{6 + (n-1)d\} \quad (n \neq 0)$$

$$6 + 2nd - d = 12 + 2nd - 2d$$

$$\therefore d = 6$$

19. 첫째항이 -10 , 공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{11}|$ 의 값은?

① 60

② 70

③ 80

④ 90

⑤ 100

해설

$$\begin{aligned}a_n &= -10 + (n-1) \cdot 2 \\ &= 2n - 12\end{aligned}$$

$$a_n = 2n - 12 = 0, \quad \therefore n = 6$$

즉, $a_1 \sim a_5$ 는 음수, $a_6 = 0$,

$a_7 \sim a_{11}$ 은 양수이다.

따라서

$$\begin{aligned}|a_1| + \cdots + |a_5| &= \left| \frac{5 \{ 2 \cdot (-10) + 4 \cdot 2 \}}{2} \right| \\ &= 30\end{aligned}$$

$$a_7 = -10 + 6 \cdot 2 = 2$$

$$a_{11} = -10 + 10 \cdot 2 = 10$$

$$\therefore |a_7| + \cdots + |a_{11}| = \frac{5 \cdot (2 + 10)}{2} = 30$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 30 + 0 + 30 = 60$$

20. 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수로 이루어진 수열의 첫째항부터 제 20 항까지의 합은?

① 2250

② 2500

③ 2750

④ 3000

⑤ 3250

해설

4로 나눈 나머지가 3인 자연수는 $4l - 1$ (단, $l \geq 0$ 인 정수)의 꼴이고,

6으로 나눈 나머지가 5인 자연수는 $6m - 1$ (단, $m \geq 0$ 인 정수)의 꼴이다.

따라서, 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수를 x 라고 하면

$$x = 4l - 1 = 6m - 1 \text{을 만족해야 하므로 } x + 1 = 4l = 6m$$

즉, $x + 1 = 12n$, 즉, $x = 12n - 1$ ($n \geq 1$ 인 정수)

따라서 조건을 만족하는 수열은 11, 23, 35, ...로 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로 첫째항부터 제 20 항까지의 합은

$$\frac{20(2 \cdot 11 + 19 \cdot 12)}{2} = 2500$$