1. $\sum_{k=1}^{5} a_k = 20$, $\sum_{k=1}^{5} b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k - b_k - 1)$ 의 값은?

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

해설

(주어진 식)
$= 2\sum_{k=1}^{5} a_k - \sum_{k=1}^{5} b_k - \sum_{k=1}^{5} 1$
$= 2 \cdot 20 - 5 - 5$
$= 30$

2. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 2n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{3}(a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^{3}(a_k - 1)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$\sum_{k=1}^{3}(a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^{3}(a_k - 1)^2$
$= \sum_{k=1}^{3}(a_k + 2a_k + 1) - \sum_{k=1}^{3}(a_k^2 - 2a_k + 1)$
$= 4\sum_{k=1}^{3} a_k = 4(3^2 + 2 \times 3) = 60$

3. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right) = 56$을 만족시키는 n의 값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right)$

$= \sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{n} l^2 + \sum_{l=1}^{n} l\right)$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

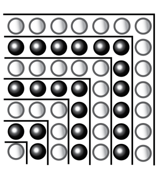
$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

즉, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 56$이므로

$n(n+1)(n+2) = 6 \cdot 7 \cdot 8$

$\therefore n = 6$

4. 오른쪽 그림을 이용하여 수열의 합을 설명할 수 있는 것은?



① $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

② $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)^2}{2}\right\}$

④ $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

⑤ $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

해설

그림의 왼쪽 아래부터 생각해보면
흰돌의 수$=1$
검은돌의 수 $=3$
흰돌의 수$=5$
즉 $1,\ 3,\ 5,\cdots$ 이런 식으로
돌의 개수가 증가함을 알 수 있다.
그런데 그림에 놓인 돌의 개수는
가로의 길이와 세로의 길이가 같으므로
$n\times n=n^2$ 임을 알 수 있다.
$\therefore 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

5. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2^n$을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 25 ④ 27 ⑤ 30

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

$\therefore\ a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 2^{5-1} = 16$

$\therefore\ a_9 + a_{10} = 25$

6. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$을 n에 대한 식으로 나타내면?

① n^2+1 ② n^2+3n ③ $2n^2$
④ $2n^2+n$ ⑤ $3n^2-1$

해설

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$이므로
$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \left\{(n-1)^2 + (n-1)\right\} \\ &= 2n \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2$

이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
$a_n = 2n$
$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n}(4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

7. 수열$\sum_{k=1}^{8}(2k-1)\cdot 2^{k-1}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3331

해설

$S = 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + 13\cdot 2^6 + 15\cdot 2^7 \cdots\cdots$ ㉠

$2S = 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \cdots + 13\cdot 2^7 + 15\cdot 2^8 \cdots\cdots$ ㉡

이므로 ㉠ - ㉡을 하면

$$-S = 2\cdot\frac{(2^8-1)}{2-1} - 1 - 15\cdot 2^8$$

$$\begin{aligned} S &= -2\cdot 2^8 + 2 + 1 + 15\cdot 2^8 \\ &= 13\cdot 2^8 + 3 = 3331 \end{aligned}$$