

1. $\sum_{k=1}^5 a_k = 20$, $\sum_{k=1}^5 b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (2a_k - b_k - 1)$ 의 값은?

① 15

② 20

③ 25

④ 30

⑤ 35

해설

(주어진 식)

$$= 2 \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 b_k - \sum_{k=1}^5 1$$

$$= 2 \cdot 20 - 5 - 5$$

$$= 30$$

2. $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 2n$ 일 때, $\sum_{k=1}^3 (a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^3 (a_k - 1)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 (a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^3 (a_k - 1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^3 (a_k + 2a_k + 1) - \sum_{k=1}^3 (a_k^2 - 2a_k + 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^3 a_k = 4(3^2 + 2 \times 3) = 60 \end{aligned}$$

3. $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) = 56$ 을 만족시키는 n 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

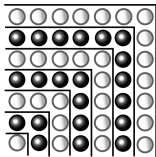
$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2} (\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 56 \text{ 이므로}$$

$$n(n+1)(n+2) = 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$\therefore n = 6$$

4. 오른쪽 그림을 이용하여 수열의 합을 설명할 수 있는 것은?



- ① $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
 ② $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 ③ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)^2}{2} \right\}$
 ④ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
 ⑤ $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

해설

그림의 왼쪽 아래부터 생각해보면

흰돌의 수 = 1

검은돌의 수 = 3

흰돌의 수 = 5

즉 1, 3, 5, ... 이런 식으로

돌의 개수가 증가함을 알 수 있다.

그런데 그림에 놓인 돌의 개수는

가로와 세로의 길이가 같으므로

$n \times n = n^2$ 임을 알 수 있다.

$\therefore 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

5. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^n a_{2k} = 2^n$ 을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$ 의 값은?

① 20

② 22

③ 25

④ 27

⑤ 30

해설

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

$$\therefore a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^n a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 2^{5-1} = 16$$

$$\therefore a_9 + a_{10} = 25$$

6. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$ 일 때, $\sum_{k=1}^n a_{2k-1}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$

② $n^2 + 3n$

③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$

⑤ $3n^2 - 1$

해설

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n \text{ 이므로}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 2$$

이것은 ㉞에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 2n$$

$$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^n (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

7. 수열 $\sum_{k=1}^8 (2k-1) \cdot 2^{k-1}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3331

해설

$$S = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + \cdots + 13 \cdot 2^6 + 15 \cdot 2^7 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2S = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \cdots + 13 \cdot 2^7 + 15 \cdot 2^8 \cdots \textcircled{㉡}$$

이므로 $\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$-S = 2 \cdot \frac{(2^8 - 1)}{2 - 1} - 1 - 15 \cdot 2^8$$

$$\begin{aligned} S &= -2 \cdot 2^8 + 2 + 1 + 15 \cdot 2^8 \\ &= 13 \cdot 2^8 + 3 = 3331 \end{aligned}$$