

1. 다음 중 유한집합인 것을 모두 고른 것은?

- ☐㉠ 5의 배수의 집합

☐㉡ 5와 6 사이의 자연수

☐㉢ 짝수의 집합

☐㉤ 100보다 큰 3의 배수의 집합

☐㉥ 우리나라 중학생의 집합

☐㉦ 1보다 작은 자연수의 집합

- ☐① ㉠, ㉡, ㉢

☐② ㉢, ㉤, ㉥

☐③ ㉤, ㉥, ㉦

☐④ ㉠, ㉤, ㉥

☒⑤ ㉡, ㉥, ㉦

해설

- ☐㉠ {5, 10, 15, ...} 이므로 무한집합이다.
- ☐㉡ 5와 6 사이에는 자연수가 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한집합이다.
- ☐㉢ {2, 4, 6, ...} 이므로 무한집합이다.
- ☐㉤ {102, 105, 108, 111, ...} 이므로 무한집합이다.
- ☐㉥ 중학생의 수는 한정되어 있으므로 유한집합이다.
- ☐㉦ 1보다 작은 자연수는 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한집합이다.

2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $\emptyset \subset A$

② $\{2\} \subset A$

③ $\{4, 5\} \in A$

④ $n(A) = 5$

⑤ $\{0, \{2\}\} \subset A$

해설

③ $\{4, 5\} \subset A$

④ $n(A) = 6$

3. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{5, 8, 9, 13\}$, $A \cap B = \{5, 9\}$, $A \cup B = \{2, 4, 5, 8, 9, 12, 13\}$ 일 때, 다음 중 집합 B 의 원소가 아닌 것은?

- ① 2
- ② 4
- ③ 5
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

A

B

8

5

2

13

9

12

4

$A \cap B = \{5, 9\}$ 이므로 원소 5와 9는 집합 B 에도 속한다.
 $5 \in B, 9 \in B$
 $A \cup B = \{2, 4, 5, 8, 9, 12, 13\}$ 의 원소에서 집합 A 의 원소들을 빼고 난 나머지는,
집합 B 에서 교집합에 속하는 원소들을 뺀 나머지 원소들이다.
따라서 2, 4, 12 는 집합 B 에 속한다.
 $2 \in B, 4 \in B, 12 \in B$

4. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 $A = \{3, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 A^c 은?

① $\{3, 5, 6, 7\}$

② $\{2, 4, 6, 8\}$

③ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

④ $\{1, 2, 4, 8, 9\}$

⑤ $\{1, 2, 4, 8, 9, 10\}$

해설

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A^c = U - A = \{1, 2, 4, 8, 9, 10\}$$

5. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

정의역을 X 로 하는 $f(x)$ 의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$

6. 다음 ()안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 ()조건이다.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

7. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0, \frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x 는 1이다.

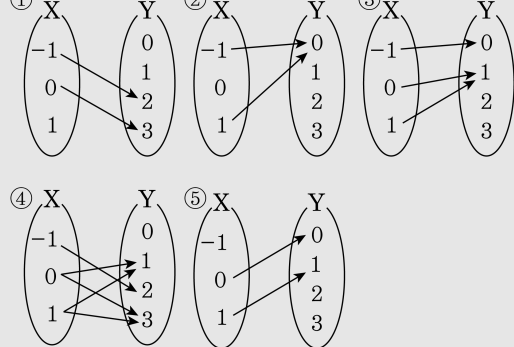
최솟값은 3이고, x 값은 1이다.

8. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 이라 한다. X 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음과 같은 X 에서 Y 로의 대응을 생각할 때, 이 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?
- ① $x \rightarrow x + 3$
- ② $x \rightarrow x^2 - 1$
- ③ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 1 \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 0 \end{cases}$
- ④ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow \text{홀수} \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 2 \end{cases}$
- ⑤ $x \rightarrow x^3$

해설

X 에서 Y 로의 함수가 되려면 X 의 원소가 빠짐없이 Y 의 원소 하나에 대응해야 한다.

순서대로 대응도를 만들어 보면 다음과 같다.



①, ②, ⑤는 Y 의 원소에 대응하지 않는 X 의 원소가 존재하므로 함수가 될 수 없고 ④는 X 의 원소 하나가 Y 의 원소 두 개에 대응하는 경우가 생기므로 역시 함수가 될 수 없다.

9. $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), $g(x) = x + c$ 라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$ 가 성립한다. 상수 a, b, c 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 7$

▷ 정답 : $c = -5$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(x + c) = a(x + c) + b = ax + ac + b$$

$$\therefore a = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ac + b = -3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f^{-1}(3) = -2 \text{이므로, } f(-2) = 3$$

$$\therefore -2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = 7, c = -5$$

10. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}}{}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여
분다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \end{aligned}$$

$a = 5, b = 10$ 이므로 $a + b = 15$

11. $3x = 2y$ 일 때, $\frac{2xy + y^2}{x^2 + xy}$ 의 값은?

① $\frac{15}{7}$

② $\frac{17}{8}$

③ $\frac{19}{9}$

④ $\frac{21}{10}$

⑤ $\frac{23}{11}$

해설

$$3x = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

$$\therefore \frac{2xy + y^2}{x^2 + xy} = \frac{3x^2 + \frac{9}{4}x^2}{x^2 + \frac{3}{2}x^2} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{21}{10}$$

12. $y = \frac{3-ax}{1-x}$ 의 그래프의 점근선이 $x = 1$, $y = -2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$y = \frac{3-ax}{1-x} = \frac{ax-3}{x-1} = \frac{a-3}{x-1} + a$$

이 분수함수의 점근선은 $x = 1$, $y = a$

$$\therefore a = -2$$

13. 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2, 3)$ 을 지날 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-1} \text{ 라 하면 } f(2) = 3, f^{-1}(2) = 3$$

$$f(2) = 2a + b = 3 \cdots \textcircled{1}$$

$$f^{-1}(2) = 3 \text{ 에서 } f(3) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = \frac{3a+b}{2} = 2 \quad \therefore 3a+b = 4 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1 \quad \therefore ab = 1$$

14. 함수 $y = \sqrt{-4x+12} - 2$ 는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = \sqrt{-4(x-3)} - 2 = 2\sqrt{-(x-3)} - 2 \text{ 이고}$$

$$y = 2\sqrt{-x} \xrightarrow[y\text{축 } -2]{x\text{축 } 3} y = 2\sqrt{-(x-3)} - 2 \text{ 이므로}$$

$$a = 2, b = 3, c = -2$$

$$\therefore a + b + c = 2 + 3 - 2 = 3$$

15. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 120 \text{ 이하의 } 5\text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 120 \text{ 이하의 } 8\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $n(A \cup B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 : 36 개

▶ 정답 : 36개

해설

$n(A) = 24$, $n(B) = 15$, $n(A \cap B) = 3$ 이므로
 $n(A \cup B) = 24 + 15 - 3 = 36$

16. $x < 2$ 는 $x \leq a$ 이기 위한 필요조건, $x > b$ 는 $x > 6$ 이기 위한 충분조건이 되도록 정수 a, b 를 정할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

필요조건, 즉 $x \leq a$ 가 $x < 2$ 에 포함되어야 하므로 a 의 최댓값은 1 이고 $x > b$ 는 $x > 6$ 에 포함되어야 하므로 b 의 최솟값은 6 이다.

$$\therefore 1 + 6 = 7$$

17. $f(x) = 2x + 3$ 일 때, $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 를 만족시킨다고 한다. 이때 $g(1)$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x \text{ 이므로 } (g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$$

$$\text{따라서 } g(f(x)) = \frac{1}{2}x$$

$$f(x) = 2x + 3 = 1 \text{ 에서 } x = -1 \text{ 이므로}$$

$$\therefore g(f(-1)) = g(1) = -\frac{1}{2}$$

18. 직선 $y = m|x - 1| + 2$ 와 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10 일 때, m 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$
- ② $\frac{2}{5}$
- ③ $-\frac{1}{5}$
- ④ $-\frac{2}{5}$
- ⑤ 1

해설

$y = m|x - 1| + 2$

i) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots \textcircled{1}$

ii) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots \textcircled{2}$

m 에 관계없이 정점 (1, 2)을 지난다.

x 절편은 $\textcircled{1}$ 에서 $x = \frac{m-2}{m}$

$\textcircled{2}$ 에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

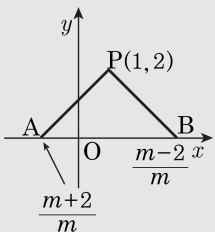
$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = -\frac{4}{m}$

$\therefore \triangle PAB$ 의 면적이 10 이므로

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$

$10m = -4$

$\therefore m = -\frac{2}{5}$



해설

삼각형의 넓이가 10 일 때 높이가 2이므로

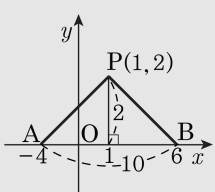
$\overline{AB} = 10$

즉 그래프의 x 절편이 -4, 6이다.

$y = m|x - 1| + 2$ 에 (6, 0)을 대입하면

$0 = m|6 - 1| + 2, 5m = -2$

$\therefore m = -\frac{2}{5}$



19. $2 + \frac{1}{k + \frac{1}{m + \frac{1}{5}}} = \frac{803}{371}$ 일 때, 자연수 k, m 의 값에 대하여 $k + m$ 의

값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$\begin{aligned} \frac{803}{371} &= 2 + \frac{61}{371} = 2 + \frac{1}{\frac{371}{61}} \\ &= 2 + \frac{1}{6 + \frac{5}{61}} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{61}{5}}} \\ &= 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{12 + \frac{1}{5}}} \end{aligned}$$

따라서 $k = 6, m = 12$

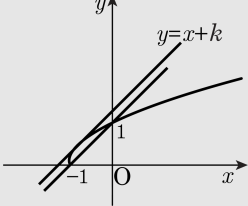
$$\therefore k + m = 18$$

20. 두 집합 $A = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x+1}\}$, $B = \{(x, y) \mid y = x+k\}$ 에서 $n(A \cap B) = 2$ 일 때, 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $k < 1$
- ② $k > \frac{5}{4}$
- ③ $1 < k < 5$
- ④ $1 \leq k < \frac{5}{4}$
- ⑤ $1 \leq k \leq \frac{5}{4}$

해설

$n(A \cap B) = 2$ 는 $y = \sqrt{x+1}$ 과 $y = x+k$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 것을 의미한다.
(i) 두 그래프가 접할 때,
 $\sqrt{x+1} = x+k$
 $x+1 = x^2 + 2kx + k^2 (x \geq -1)$
 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0 (x \geq -1)$
이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D = (2k-1)^2 - 4(k^2 - 1) = 0$
 $-4k + 5 = 0$
 $\therefore k = \frac{5}{4}$
(ii) 직선 $y = x+k$ 가 점 $(-1, 0)$ 을 지날 때
 $0 = -1 + k \therefore k = 1$
(i), (ii) 에 의하여
 $\therefore 1 \leq k < \frac{5}{4}$



21. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 18 \text{의 약수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구한 것은?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

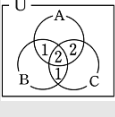
해설

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$
 $(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$
 $(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$
 $\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$
 X 는 원소 1, 2, 3, 6 을 포함하는
 $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ 의 부분집합이므로
(집합 X 의 갯수) $\equiv 2^{8-4} = 2^4 = 16(\text{개})$

22. 세 권의 책 A, B, C가 있다. A를 읽은 학생은 5명, B를 읽은 학생은 4명, C를 읽은 학생은 7명, A와 B를 모두 읽은 학생은 3명, 세 권을 모두 읽은 학생은 2명일 때, C만 읽은 학생의 수가 가장 적을 경우는 몇 명인가?
- ① 1명 ② 2명 ③ 3명 ④ 4명 ⑤ 5명

해설

집합 A, B, C를 각각 책 A, B, C를 읽은 학생들의 집합이라 하면 $n(A) = 5, n(B) = 4, n(C) = 7, n(A \cap B) = 3, n(A \cap B \cap C) = 2$ C만 읽는 학생수가 가장 적을 때는 A와 C, B와 C를 읽은 학생수가 가장 많은 경우로 벤다이어그램에서



$7 - (2 + 2 + 1) = 2(\text{명})$

23. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

- ① $r \rightarrow p$
- ② $\sim p \rightarrow \sim q$
- ③ $\sim p \rightarrow \sim r$
- ④ $\sim r \rightarrow \sim p$
- ⑤ $\sim q \rightarrow \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면
 $Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참
 $R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \rightarrow p$ 가 참
 $Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

24. 다음은 ‘ x, y 가 자연수일 때, xy 가 짝수이면 x 또는 y 가 짝수이다.’를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 (가)이면 xy 도 (가)이다.’이다.
 $x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 (나)가 된다.
따라서, 대우가 (다)이므로 주어진 명제도 (다)이다.

- ① 짝수, 홀수, 참

② 짝수, 짝수, 참
- ③ 짝수, 짝수, 거짓

④ 홀수, 홀수, 참
- ⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 ‘자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 홀수이면 xy 도 홀수이다.’이다.
 $x = 2a - 1, y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $xy = (2a - 1)(2b - 1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 홀수가 된다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

25. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(i) $f(2x) = f(x) \ (x = 1, 2, 3, \dots)$
(ii) $f(2x + 1) = 2^x \ (x = 0, 1, 2, 3, \dots)$

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$$1280 = 2^8 \cdot 5 \text{ 이므로,}$$
$$f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \cdots = f(5)$$
$$= f(2 \cdot 2 + 1) \text{ 이므로,}$$
$$f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$$