1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = -\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16} = -4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2i} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

2. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0　② $\sqrt{3}$　③ $-\sqrt{3}$　④ 1　⑤ -1

해설

$$
\begin{aligned}
i(x+i)^3 &= i(x^3+3x^2i-3x-i)\\
&= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i
\end{aligned}
$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

3. 복소수 $z = (2+i)a^2 + (1+4i)a + 2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$
순허수이므로 $2a^2 + a - 6 = 0$
$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3) = 0$
$\Leftrightarrow \ a = -2$ 또는 $a = \frac{3}{2}$
그런데 $a = 2$ 이면,
$a^2 + 4a + 4 = 0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.
$\therefore \quad a = \frac{3}{2}$

4. 등식 $2x + (y+1)i = 6 - i$를 만족하는 실수 x, y의 값은?

① $x = 3$, $y = -2$ ② $x = 3$, $y = 0$ ③ $x = 4$, $y = -2$
④ $x = 4$, $y = 0$ ⑤ $x = -1$, $y = 4$

해설

$(2x - 6) + (y + 2)i = 0$

x, y는 실수이므로, $2x - 6 = 0$, $y + 2 = 0$

$\Rightarrow x = 3$, $y = -2$

5. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1),\ (4,\ 2,\ 2),\ (3,\ 1,\ 3)$ 3개

6. $x,\ y$가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠

$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$

$\therefore\ x + y = 3$ ($\because\ x,\ y$ 는 양의 실수)

7. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y를 구할 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

$(1-2xi)(2-yi)=6-2i$ (단, $x>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(2-2xy)-(4x+y)i=6-2i$

$2-2xy=6,\ 4x+y=2$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$

$\therefore\ x=1(x>0),\ y=-2$

8. $\frac{1}{\sqrt{-8}}(3\sqrt{-2} - 3\sqrt{-8} + \sqrt{-32})$ 을 계산하면?

① i　　② $\frac{1}{2}$　　③ $-i$　　④ $-\frac{1}{2}$　　⑤ $\frac{i}{2}$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}i}\left(3\sqrt{2}i - 6\sqrt{2}i + 4\sqrt{2}i\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}i} \times \sqrt{2}i \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

9. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1 ② -1

③ $\sqrt{-1}$ ④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

10. $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1998}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 0 ② i ③ $-2i$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

$=f(-i)+f(i)$

$=(-i)^{1998}+(i)^{1998}$

$=(-i)^{1996}\cdot(-i)^2+i^{1996}\cdot i^2=-2$

11. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 의 값을 구하면?

① 0 ② i ③ 1 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i$

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$

$=i^{2005}+(-i)^{2005}$

$=(i^4)^{501}\cdot i+((-i)^4)^{501}\cdot(-i)$

$=i+(-i)=0$

12. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $n = 4$

해설

$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$ 에서

$n = 1$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$

$n = 2$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$

$n = 3$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$

$n = 4$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4 이다.

13. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로
$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$
주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로
$x^2 + y^2 = 4$

14. α, β 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$ 이다.
㉡ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.
㉢ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1,\ \beta=i$
㉡ (생략)
㉢ $\alpha=x+yi$ 라 하면
$\alpha\beta=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$($x,y$는실수)
$x^2+y^2=0$ 이려면 $x=0, y=0$
즉, $\alpha=0$

15. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.

㉡ $z+\bar{z}=0$ 이면, z 는 순허수이다.

㉢ $z+\bar{z}$ 는 항상 실수이다.

㉣ $z-\bar{z}$ 는 항상 순허수이다.

㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

㉠ $z\bar{z}=a^2+b^2 \Rightarrow$ 실수

㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0, a=0$

$\therefore\ z=bi \Rightarrow$ 순허수 ($\because\ z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)

㉢ $z+\bar{z}=2a \Rightarrow$ 실수

㉣ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b=0$ 인 경우

$z-\bar{z}=0$ 으로 순허수가 아니다.

㉤ $\frac{1}{z}=c+di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\frac{1}{z}}=c-di$ 이므로 참

16. $z=1+i$ 일 때, $\frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}$ 의 값은?(단, $i=\sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$z=1+i$ 이면 $\bar{z}=1-i$ 이다.

$\therefore \frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}=\frac{(1+i)(1-i)}{(1+i)-(1-i)}=\frac{2}{2i}=-i$

17. 양의 실수 $a,\ b$에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i는 허수단위) 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3+i$ ② $2+3i$ ③ $5-2i$
④ $1-3i$ ⑤ $-4-2i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i \in A\ (a>0,\ b>0)$
① $a+b=-3,\ a-b=1$
$\therefore\ a=-1,\ b=-2$ (부적당)
② $a+b=2,\ a-b=3$
$\therefore\ a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2}$ (부적당)
③ $a+b=5,\ a-b=-2$
$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2}$ (양의 실수)
④ $a+b=1,\ a-b=-3$
$\therefore\ a=-1,\ b=2$ (부적당)
⑤ $a+b=-4,\ a-b=-2$
$\therefore\ a=-3,\ b=-1$ (부적당)

18. $w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때, $(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$w = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$\therefore\ w^2+w+1=0,\quad w^3=1$

$$\begin{aligned}
\therefore\ & (w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2 \\
&= (w-2w-2)^2+(2w-w-1)^2 \\
&= (-w-2)^2+(w-1)^2 \\
&= w^2+4w+4+w^2-2w+1 \\
&= 2w^2+2w+5 \\
&= 2(w^2+w+1)+3 \\
&= 3
\end{aligned}$$

19. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}}\ \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\text{㉡}}\ \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\text{㉢}}\ \frac{\sqrt{-16}}{2} \\
&= \boxed{\text{㉣}}\ \frac{4i}{2} \\
&= \boxed{\text{㉤}} = \sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

20. $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$가 성립할 때,

$\sqrt{(y-x+1)^2} + \sqrt[3]{x^3 - y^3 - 3xy(x-y)} + |x|$를 간단히 하면?

① $x-1$　　② $-x+1$　　③ $2y-3x+1$

④ $3x-2y-1$　　⑤ $-3x-2y-1$

해설

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 일 때, $y \geq 0,\ x < 0$

(준식) $= |y-x+1| + \sqrt[3]{(x-y)^3} + |x|$

$= y-x+1+x-y-x = -x+1$