

1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① -2 의 제곱근은 $\sqrt{2}i$ 와 $-\sqrt{2}i$ 이다.

② $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = -\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{\frac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16} = -4i$

해설

③ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{2}}{2i} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$

2. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0

② $\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{3}$

④ 1

⑤ -1

해설

$$\begin{aligned}i(x+i)^3 &= i(x^3 + 3x^2i - 3x - i) \\ &= (-3x^2 + 1) + (x^3 - 3x)i\end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$$\therefore x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0, \pm\sqrt{3}$$

3. 복소수 $z = (2 + i)a^2 + (1 + 4i)a + 2(2i - 3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

해설

$$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$$

순허수이므로 $2a^2 + a - 6 = 0$

$$\Rightarrow (a + 2)(2a - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

그런데 $a = 2$ 이면,

$a^2 + 4a + 4 = 0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

4. 등식 $2x + (y + 1)i = 6 - i$ 를 만족하는 실수 x, y 의 값은?

- ① $x = 3, y = -2$ ② $x = 3, y = 0$ ③ $x = 4, y = -2$
④ $x = 4, y = 0$ ⑤ $x = -1, y = 4$

해설

$$(2x - 6) + (y + 2)i = 0$$

x, y 는 실수이므로, $2x - 6 = 0, y + 2 = 0$

$$\Rightarrow x = 3, y = -2$$

5. 등식 $(x + yi)(z - i) = 10$ 을 만족하는 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답: 개

▷ 정답: 3개

해설

$$(xz + y) + (yz - x)i = 10$$

$$xz + y = 10 \cdots \textcircled{㉠}, yz - x = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을㉠에 대입

$$y(z^2 + 1) = 10$$

z 를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5, 5, 1), (4, 2, 2), (3, 1, 3)$ 3개

6. x, y 가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$ 일 때, $x + y$ 의 값을 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$xy - 2 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$$

$$\therefore x + y = 3 \quad (\because x, y \text{ 는 양의 실수})$$

7. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y 를 구할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

$$(1 - 2xi)(2 - yi) = 6 - 2i \quad (\text{단, } x > 0)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$(2 - 2xy) - (4x + y)i = 6 - 2i$$

$$2 - 2xy = 6, \quad 4x + y = 2$$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1(x > 0), \quad y = -2$$

8. $\frac{1}{\sqrt{-8}}(3\sqrt{-2} - 3\sqrt{-8} + \sqrt{-32})$ 을 계산하면?

- ① i ② $\frac{1}{2}$ ③ $-i$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{i}{2}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}i} (3\sqrt{2}i - 6\sqrt{2}i + 4\sqrt{2}i) \\&= \frac{1}{2\sqrt{2}i} \times \sqrt{2}i \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

9. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1

② -1

③ $\sqrt{-1}$

④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$\therefore j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$$

10. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1998}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 0

② i

③ $-2i$

④ -1

⑤ -2

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

$$= f(-i) + f(i)$$

$$= (-i)^{1998} + (i)^{1998}$$

$$= (-i)^{1996} \cdot (-i)^2 + i^{1996} \cdot i^2 = -2$$

11. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 의 값을 구하면?

① 0

② i

③ 1

④ $1+i$

⑤ $1-i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$$

$$= i^{2005} + (-i)^{2005}$$

$$= (i^4)^{501} \cdot i + ((-i)^4)^{501} \cdot (-i)$$

$$= i + (-i) = 0$$

12. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \text{ 에서}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4이다.

13. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$$

주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로

$$x^2 + y^2 = 4$$

14. α, β 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

㉡ $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$ 이다.

㉢ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$

㉡ (생략)

㉢ $\alpha = x + yi$ 라 하면

$$\alpha\beta = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \quad (x, y \text{는 실수})$$

$$x^2 + y^2 = 0 \text{ 이려면 } x = 0, y = 0$$

$$\text{즉, } \alpha = 0$$

15. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

- ㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
 ㉡ $z + \bar{z} = 0$ 이면, z 는 순허수이다.
 ㉢ $z + \bar{z}$ 는 항상 실수이다.
 ㉤ $z - \bar{z}$ 는 항상 순허수이다.
 ㉥ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$$

$$\text{㉠ } z\bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow \text{실수}$$

$$\text{㉡ } z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 0, a = 0$$

$\therefore z = bi \Rightarrow \text{순허수} (\because z \neq 0 \text{ 이므로 } b \neq 0)$

$$\text{㉢ } z + \bar{z} = 2a \Rightarrow \text{실수}$$

$$\text{㉤ } z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b = 0$ 인 경우
 $z - \bar{z} = 0$ 으로 순허수가 아니다.

$$\text{㉥ } \frac{1}{z} = c + di \text{ 라면 } \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\overline{1}}{\bar{z}} = c - di \text{ 이므로 참}$$

16. $z = 1 + i$ 일 때, $\frac{z\bar{z}}{z - \bar{z}}$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $1 + i$

② $1 - i$

③ 1

④ i

⑤ $-i$

해설

$z = 1 + i$ 이면 $\bar{z} = 1 - i$ 이다.

$$\therefore \frac{z\bar{z}}{z - \bar{z}} = \frac{(1 + i)(1 - i)}{(1 + i) - (1 - i)} = \frac{2}{2i} = -i$$

17. 양의 실수 a, b 에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i 는 허수단위)의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3 + i$

② $2 + 3i$

③ $5 - 2i$

④ $1 - 3i$

⑤ $-4 - 2i$

해설

$$z = (a+b) + (a-b)i \in A \quad (a > 0, b > 0)$$

① $a+b = -3, a-b = 1$

$$\therefore a = -1, b = -2 \text{ (부적당)}$$

② $a+b = 2, a-b = 3$

$$\therefore a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{2} \text{ (부적당)}$$

③ $a+b = 5, a-b = -2$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{7}{2} \text{ (양의 실수)}$$

④ $a+b = 1, a-b = -3$

$$\therefore a = -1, b = 2 \text{ (부적당)}$$

⑤ $a+b = -4, a-b = -2$

$$\therefore a = -3, b = -1 \text{ (부적당)}$$

18. $w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ 일 때, $(w + 2w^2)^2 + (2w + w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$w = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore w^2 + w + 1 = 0, \quad w^3 = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore (w + 2w^2)^2 + (2w + w^2)^2 &= (w - 2w - 2)^2 + (2w - w - 1)^2 \\ &= (-w - 2)^2 + (w - 1)^2 \\ &= w^2 + 4w + 4 + w^2 - 2w + 1 \\ &= 2w^2 + 2w + 5 \\ &= 2(w^2 + w + 1) + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

19. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}} \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{-2}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉡}} \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉢}} \frac{\sqrt{-16}}{2} \\ &= \boxed{\text{㉤}} \frac{4i}{2} \\ &= \boxed{\text{㉥}} = \sqrt{-4}\end{aligned}$$

▶ 답 :

▶ 정답 : ㉢

해설

$$\sqrt{-2} \sqrt{-2} = \sqrt{2}i \sqrt{2}i = 2i^2 = -2$$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

20. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ 가 성립할 때,

$\sqrt{(y-x+1)^2} + {}^3\sqrt{x^3 - y^3 - 3xy(x-y)} + |x|$ 를 간단히 하면?

① $x - 1$

② $-x + 1$

③ $2y - 3x + 1$

④ $3x - 2y - 1$

⑤ $-3x - 2y - 1$

해설

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ 일 때, } y \geq 0, x < 0$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= |y - x + 1| + {}^3\sqrt{(x - y)^3} + |x| \\ &= y - x + 1 + x - y - x = -x + 1 \end{aligned}$$